Universidade de Lisboa

A ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA DOS ALUNOS DO 11.º ANO NO TEMA DAS FUNÇÕES

Cláudia Patrícia Neves Henriques Simãozinho

RELATÓRIO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

2014

Universidade de Lisboa

A ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA DOS ALUNOS DO 11.º ANO NO TEMA DAS FUNÇÕES

Cláudia Patrícia Neves Henriques Simãozinho

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Henriques e coorientado pela Professora Doutora Maria Isabel Simão

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

2014

Agradecimentos

Começo por agradecer à Professora Helena Fonseca por me ter ‘emprestado’ os seus alunos e por todo o apoio, desde o primeiro dia. É sempre bom aprender com alguém que, sem dar lições, nos dá o exemplo.

À Professora Ana Henriques, um muito obrigada pela preocupação, dedicação e excelente trabalho de edição de um texto, nem sempre conexo.

Obrigada, ainda, à Professora Maria Isabel Simão, pelas orientações e dicas, e à minha colega de estágio Isabel Magalhães, pelo apoio e troca de ideias.

Agradeço a todos os alunos da turma que acompanhei. Como vos disse: “Tornaram o meu estágio mais fácil e mais divertido!”

Agradeço ainda ao meu avô, por ter tido a paciência de ler este trabalho à procura de gralhas, à minha madrinha Ana Antunes pelo apoio moral e porque sabe o trabalho que deu fazê-lo e ao meu marido Fábio Henriques Simãozinho, pelas noites em que fez o jantar, para que eu pudesse ficar a escrevê-lo.

Não posso deixar de fazer referência à Professora Gracinda Gomes por me ter dado oportunidade de perceber que adoro ensinar, aos Professores Cristian Barbarosie e Anca-Maria Toader, por me apoiarem no ‘trapézio sem rede’ que foi dar aulas pela primeira vez, ao Professor Armando Machado por ser um dos meus referenciais do que um ‘excelente professor’ deveria ser e ao Professor Orlando Neto pela frontalidade, sempre.

Resumo

Este estudo foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, como relatório da prática de ensino supervisionada, no ano letivo 2013/14, durante a lecionação de um conjunto de quinze aulas de 50 minutos nas subunidades Operações com Funções, Função Inversa e Funções com Radicais, da unidade temática Funções, da disciplina de Matemática A, no 11.º ano de escolaridade.

Tem como objetivo analisar a argumentação matemática dos alunos do 11.º ano do Ensino Secundário na resolução de tarefas dirigidas à argumentação, no âmbito de uma unidade de ensino sobre Funções, verificando em particular: quais os processos argumentativos que os alunos privilegiam na resolução de tarefas dirigidas à argumentação e que dificuldades evidenciam na sua utilização; quais os conhecimentos prévios a que os alunos recorrem, ao longo da unidade de ensino; e de que modo o trabalho realizado na unidade de ensino contribuiu para os alunos desenvolverem uma argumentação mais formal.

Adotei uma estratégia de ensino-aprendizagem exploratória, com recurso a diversos tipos de tarefas mas com maior ênfase em tarefas dirigidas à argumentação matemática, solicitando justificações, provas ou demonstrações aos alunos. Foi proposto um relatório escrito individual como elemento de avaliação. Os dados foram recolhidos através de observação direta, recolha documental das produções escritas dos alunos, gravação áudio das aulas lecionadas e entrevista semiestruturada a três alunos da turma.

A análise dos dados recolhidos permite concluir que os alunos produzem justificações, provas e demonstrações, tendo em conta o que é pedido em cada tarefa e são capazes de compreender local e holisticamente uma demonstração. Os alunos mobilizaram diferentes conhecimentos sobre funções e sobre outros temas matemáticos, na resolução das tarefas, argumentando geométrica e graficamente. Verificou-se uma evolução no formalismo usado pelos alunos na argumentação matemática.

Palavras-chave: Funções, Argumentação matemática, Dificuldades dos alunos, Ensino Secundário.

Abstract

This study was conducted as part of my MSc degree in Mathematics Teacher Education as a supervised teaching practice report, which takes place during the scholar year of 2013/14 in a grade 11 class. The teaching practice consisted in a set of fifteen 50-minute lessons in the subunits Operations with Functions, Inverse Function and Irrational Functions, included in the general mathematics theme of Functions.

The study aims to analyse the students’ mathematical argumentation when solving tasks focused on mathematical argumentation, in the context of a teaching unit on Functions. In particular, I intended to analyse: which argumentative processes do students prefer in solving tasks focused on mathematical argumentation and what difficulties do they show in their use; which prior knowledge do students use to solve the tasks proposed during the teaching unit; and how the work carried out during the teaching unit contributed to promote a more formal argumentation.

I adopted an exploratory teaching strategy, using a variety of tasks with emphasis on mathematical argumentation, which require students to produce justifications, proofs or demonstrations. I also proposed an individual written report as students’ learning assessment. Data collection included direct observation, the written documents produced by students, audio recording of the classroom discussions and a semi-structured interview to three students.

The results of the study show that students produce justifications, proofs and demonstrations, taking into account what is asked in each task and they are able to understand a demonstration both locally and holistically. Students mobilized different knowledge about functions and other mathematics topics in solving the tasks, to argue both geometrically and graphically. Moreover, students develop their use of formalism in mathematical argumentation.

Keywords: Functions, Mathematical argumentation, Students' difficulties, Secondary education.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

1. Introdução

1.1 Objetivo e questões de estudo

Este trabalho foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, como relatório da prática de ensino supervisionada. O estudo que o precede foi realizado no 2.º período do ano letivo 2013/14, durante a lecionação de um conjunto de quinze aulas de 50 minutos nas subunidades Operações com Funções, Função Inversa e Funções com Radicais, da unidade temática Funções, da disciplina de Matemática A, no 11.º ano de escolaridade, numa turma de 19 alunos da Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão. A componente de cariz investigativo deste relatório prende-se com a problemática da argumentação matemática em alunos do 11.º ano do Ensino Secundário, em particular as provas matemáticas relacionadas com o tema das Funções e a forma como os alunos as compreendem e produzem. Adotando a classificação de Balacheff (2000), utilizei, ao longo do texto, a designação *demonstração* para um caso particular de *prova* matemática em que o nível de formalização e simbologia é já elevado, sendo que o termo prova designa qualquer argumento capaz de assegurar a validade de um dado enunciado (Harel & Sowder, 2007).

A capacidade de compreender e produzir demonstrações e provas matemáticas, aparece no Programa Nacional de Matemática A do Ensino Secundário (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2001) como parte dos objetivos e competências gerais a atingir ao longo deste ciclo de estudos. Os autores consideram que é essencial que os alunos desenvolvam esta capacidade por diversas razões: (a) os raciocínios demonstrativos/dedutivos são característicos da Matemática enquanto ciência; (b) este tipo de pensamento é também útil no quotidiano dos alunos como cidadãos críticos e (c) permite aos alunos vivenciar a experiência de fazer Matemática. O tema das Funções tem uma grande ênfase e prevalência no referido programa, dado o seu importante papel na modelação de acontecimentos do quotidiano, relacionados com diversas disciplinas curriculares e em estabelecer e compreender relações entre as expressões algébricas e as representações gráficas.

Além disso, as unidades curriculares de Matemática, integradas nos currículos de grande parte dos cursos superiores, têm uma forte componente de análise de funções.

A argumentação matemática e, particularmente, a demonstração, tem tido um lugar de destaque nos documentos curriculares de vários países, tanto como capacidade transversal como enquanto tópico independente (Rodrigues, 2010) e espera-se que os alunos consigam construir, no final do Ensino Secundário, "cadeias de raciocínio relativamente complexas" (NCTM, 2000, p. 58). No entanto, vários estudos têm salientado que a maioria dos alunos tem dificuldade em compreender e produzir demonstrações e não percebem o seu propósito ou utilidade (Harel & Sowder, 2007). A origem desta dificuldade é habitualmente atribuída aos alunos e à sua falta de maturidade lógica (Harel & Sowder, 2007) ou ao método de ensino das demonstrações utilizado (Balacheff, 2000) mas, apesar das inovações metodológicas preconizadas ao longo dos anos e em diferentes programas, o insucesso persiste. Meija-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads e Samkoff (2012) afirmam que o nível de compreensão que os alunos têm sobre as demonstrações matemáticas é, ainda, uma questão em aberto e que poucos estudos se focam nesta questão.

Considerando, então, o tópico das funções como sendo propício ao desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos, este estudo tem como objetivo analisar a argumentação matemática dos alunos do 11.º ano do Ensino Secundário na resolução de tarefas dirigidas à argumentação, no âmbito de uma unidade de ensino sobre Funções. Para ter um enfoque mais específico dentro desta problemática, procurei dar resposta às seguintes questões:

- Quais os processos argumentativos que os alunos privilegiam (justificação, prova ou demonstração) na resolução de tarefas dirigidas à argumentação? Que dificuldades evidenciam na utilização desses processos?
- Quais os conhecimentos prévios a que os alunos recorrem na resolução de tarefas dirigidas à argumentação, ao longo da unidade de ensino? Que dificuldades evidenciam na mobilização desses conhecimentos?
- De que modo o trabalho realizado na unidade de ensino e, em particular, a resolução de tarefas dirigidas à argumentação contribuiu para os alunos desenvolverem uma argumentação mais formal?

1.2 Motivações pessoais

Houve diversas razões, de ordem pessoal, que me levaram a querer estudar a problemática da argumentação matemática. Enquanto aluna do Ensino Básico e Secundário, sempre senti falta de prova de alguns resultados que me eram apresentados nas aulas de Matemática. Lembro-me que, no 9.º ano de escolaridade, pedi à professora que me explicasse de onde vinha a fórmula resolvente e que me provasse que $\sqrt{2}$ não podia ser escrito sob a forma de fração de números inteiros e para ambas as questões a resposta foi: "daqui a uns anos vais aprender isso". Nas férias de verão desse ano, dirigi-me à biblioteca municipal de Caldas da Rainha, requisitei o único livro disponível na secção de Matemática sobre números e tive o meu primeiro contacto com teoremas enunciados formalmente e demonstrações matemáticas.

Foi nessa altura que decidi que queria seguir uma licenciatura de Matemática porque percebi que a demonstração tinha o poder de atribuir, à Matemática, um grau de certeza absoluta que nenhuma outra ciência pode alcançar. Nas palavras de Paulo Freitas (2011): "a demonstração é um património central da Matemática. Ela dá um nível de certeza e coerência aos resultados apresentados que não pode ser adquirido de nenhuma outra forma" (p. 8). A minha apreciação pela demonstração é tal que, antes de começar o Mestrado em Ensino de Matemática, estive um ano e meio no Mestrado em Matemática da Universidade de Lisboa e a minha tese teria sido sobre Teoria da Demonstração.

No entanto, apesar do meu gosto e apreciação pela demonstração, fui-me apercebendo que alguns colegas na faculdade tinham muita dificuldade em compreender demonstrações e principalmente em produzi-las e, à medida que a demonstração foi sendo mais frequente nas salas de aula do Ensino Secundário e até do Ensino Básico, ao contactar com alunos como professora e como explicadora, comecei a questionar-me sobre até que ponto os alunos atribuíam significado às demonstrações formais e, acima de tudo, até que ponto reconheciam o poder de prova de uma demonstração face à explicitação de exemplos.

Tudo isto me levou a querer estudar esta problemática mais a fundo, tanto de um ponto de vista teórico, fazendo uma revisão de literatura que me permita construir uma visão do que já foi estudado sobre esta temática, como do ponto de vista empírico, recolhendo e analisando dados de uma turma que me permitam compreender a sua argumentação. Procurei dar aos alunos oportunidade de desenvolver uma apreciação pelo poder de uma demonstração e pela precisão da linguagem formal da Matemática (NCTM, 2000). Acredito que, mesmo as crianças mais pequenas têm a capacidade de produzir argumentos que podem ser vistos como provas matemáticas e que através da análise da argumentação usada, o professor pode perceber a profundidade da compreensão e dos conhecimentos dos alunos sobre um determinado tema (Harel & Sowder, 2007).

A importância do estudo das Funções é reconhecida tanto por autores do campo da investigação educacional, como pelos documentos curriculares, especialmente no Ensino Secundário, onde o número de aulas dedicadas a este tema é superior ao dos outros temas abordados nos três anos deste ciclo (Silva et al., 2001). As conexões das funções com problemas da vida real, das mais variadas áreas, são de tal forma evidentes que os próprios alunos as compreendem e percebem a sua utilidade. Por exemplo, ao contrário do que acontece com outros temas matemáticos, este é um dos temas em que nunca fui confrontada com a frequente pergunta dos alunos "mas para que é que isto me vai servir no futuro?". As funções relacionam expressões algébricas (Álgebra) com representações gráficas e argumentos geométricos (Geometria) (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990) por isso são um tema propício para estudar a argumentação dos alunos.

Os alunos do Ensino Secundário que optarem pelos cursos de Ciências e Tecnologias ou de Ciências Socioeconómicas, com vista à incursão num curso do Ensino Superior, vão encontrar muitos planos curriculares com disciplinas com uma forte incidência no cálculo e análise de Funções. Enquanto monitora na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, fui responsável pelas aulas teórico-práticas das unidades curriculares de Matemática I e de Cálculo I das Licenciaturas de: Engenharia da Energia e do Ambiente; Meteorologia, Oceanografia e Geofísica; e Geologia. Esta experiência permitiu-me perceber algumas das dificuldades que os alunos já traziam do Ensino Secundário, tanto ao nível da argumentação como da compreensão dos conceitos relacionados com funções. Os resultados deste estudo podem, assim, trazer um contributo importante para a minha prática letiva futura, em particular para ajudar a superar algumas destas dificuldades detetadas.

1.3 Organização do estudo

Ao organizar este relatório, tive por base o documento oficial das 'Orientações para o desenvolvimento e elaboração do relatório da prática de ensino supervisionada' (disponível em http://www.ie.ulisboa.pt) e também alguma bibliografia sobre investigação educacional. Acerca da investigação sobre a própria prática, Ponte (2004) afirma que:

> "a investigação começa com a identificação de um problema relevante (…) para o qual se procura, de forma metódica, uma resposta convincente. A investigação só termina quando foi comunicada a um grupo para o qual ela faz sentido, discutida e validada no seu seio." (p.64)

Atendendo ao referido, comecei por descrever, no primeiro capítulo - Introdução, o objetivo e questões centrais do estudo, assim como apresentar as principais motivações que me levaram a escolher esta problemática. No segundo capítulo – Enquadramento da problemática e curricular - faço uma revisão de literatura, baseada nalguns autores de referência, sobre a argumentação matemática, abordando: (1) raciocínio matemático (indutivo e dedutivo); (2) argumentação matemática, particularizada em processos de justificação, prova e demonstração; (3) tipos de prova; e (4) compreensão de uma demonstração. Enquadro, igualmente, as questões da argumentação nos documentos curriculares e discuto as perspetivas sobre o ensino e aprendizagem das funções.

O terceiro capítulo foca-se na unidade de ensino lecionada, onde começo por fazer uma breve caracterização do contexto escolar e da turma onde ocorreu a intervenção letiva. Debruço-me sobre as orientações do Programa de Matemática A para o tema das funções e explicito os conceitos matemáticos abordados nas aulas lecionadas nesta unidade de ensino. Com base na literatura sobre educação matemática, apresento e justifico as opções tomadas na unidade de ensino relativamente às estratégias de ensino, às tarefas a aplicar e aos instrumentos de avaliação das aprendizagens. Termino este capítulo com uma breve descrição das aulas lecionadas. No capítulo seguinte – Métodos e procedimentos de recolha de dados - são descritos os instrumentos usados para a recolha de dados e justificada a sua adequação ao estudo. Segue-se o capítulo da análise dos dados, orientada pelas questões de estudo. No sexto e último capítulo encontram-se as conclusões e reflexões pessoais sobre o estudo realizado.

2. Enquadramento da problemática

2.1 Raciocínio matemático: indutivo e dedutivo

A definição de raciocínio matemático não é única. Neste trabalho, adoto a definição de Balacheff (2000) que designa raciocínio, como a atividade intelectual que consiste em manipular a informação existente de forma a produzir nova informação. A longo do processo escolar, pretende-se desenvolver nos alunos o raciocínio algébrico, geométrico, proporcional e probabilístico, entre outros, mas independentemente dos temas matemáticos envolvidos, a discussão das diferenças entre o raciocínio indutivo, que parte de casos particulares para casos gerais, e o raciocínio dedutivo que parte de propriedades gerais para casos particulares constitui um ponto de partida para a análise do que caracteriza o raciocínio e os seus processos (NCTM, 2000).

Harel e Sowder (2007) definem o raciocínio dedutivo como "um modo de pensamento que normalmente é caracterizado como uma sequência de proposições onde se deve aceitar que uma proposição é verdadeira se também se aceitar a veracidade das que a precedem nessa sequência" (p. 815). As pesquisas no campo da educação mostram que os alunos têm maior facilidade em raciocinar indutivamente (Harel & Sowder, 2007), portanto, é necessário estimular este tipo de raciocínio, mas também, propor-lhes tarefas que os levem aos poucos a perceber a utilidade e a necessidade do raciocínio dedutivo (Quin, 2009). Além disso, o raciocínio matemático (tanto indutivo como dedutivo) desenvolve-se melhor e mais rapidamente se os alunos tomarem consciência de que o estão a usar e das estratégias que estão a desenvolver (Mason, Burton & Stacey, 1982).

O raciocínio matemático contempla processos de formulação de questões e conjeturas, assim como processos de realização de testes e justificações (Mata-Pereira & Ponte, 2013). Quem raciocina dedutivamente tem tendência a notar padrões e regularidades com mais facilidade, não se limitando a conjeturar, mas questionando essas conjeturas e testando a sua razão e a sua veracidade (NCTM, 2000). No entanto, Balacheff (2000) defende que a forte certeza gerada por um conjunto de testes particulares, representa um obstáculo ao desencadeamento de processos de validação de conjeturas e provas gerais. Neste sentido, Harel e Sowder

(2007) defendem que os estudantes devem reconhecer a diferença entre uma conjetura e um facto, sendo que uma conjetura é uma ideia que nos parece certa mas que ainda não está provada, e o ato de provar ou construir uma prova matemática é estabelecer a verdade dessa ideia. Para isso, é necessário implementar uma mudança na forma como os estudantes olham a Matemática e desenvolver um trabalho continuado, ao longo de todo o percurso escolar, que lhes permita compreender a diferença entre as generalizações baseadas apenas em casos particulares e as generalizações assentes em propriedades ou conceitos matemáticos (Mata-Pereira & Ponte, 2013).

Quando se usam casos particulares com vista a chegar a uma generalização, estes devem ser escolhidos de forma sistemática e não aleatória (Rodrigues, 2010) pois o que se pretende não é mostrar que a proposição em questão é verdadeira para aqueles casos, mas sim estabelecer as propriedades comuns a esses casos, que justificam a sua veracidade. Por outro lado, se o que queremos é apenas ter uma ideia da veracidade da proposição ou procurar um possível contraexemplo, uma escolha abrangente e diversificada é mais produtiva (Mason et al., 1982). Esta diferença de perspetiva sobre a particularização corresponde a uma diferença na forma de raciocínio adotada pelos alunos e leva-os a procurar testar a conjetura em casos que entendem como o mais gerais possível, dentro de cada situação (Balacheff, 2000).

Para se dar a transição do raciocínio indutivo para esquemas demonstrativos dedutivos, é necessário que os alunos deixem de associar os objetos matemáticos a situações reais e empíricas, e que passem a encará-los como objetos abstratos com um conjunto de propriedades (Rodrigues, 2010). No entanto, muitos alunos não reconhecem total validade numa demonstração matemática sentindo a necessidade de continuar a experimentar casos particulares, mesmo num resultado que já foi demonstrado (Harel&Sowder, 2007). Estes autores distinguem os processos de certificar e persuadir, sendo que o primeiro é a forma de o individuo ter a certeza da veracidade de uma asserção e o segundo consiste em convencer os outros dessa veracidade. É nesta segunda componente que se desenrola a argumentação e se produzem provas matemáticas.

2.2 Argumentação: justificação, prova e demonstração

A argumentação é uma forma de transformar o pensamento de um determinado indivíduo numa crença coletiva (Prusak, Hershkowitz, & Schwarz, 2012). É um processo que visa, não só explicitar o nosso raciocínio, mas também convencer outrem de que este é válido e verdadeiro. É, portanto, essencial que o raciocínio matemático, particularmente as formas de argumentação (entre as quais a demonstração formal), constituam uma parte importante da aprendizagem matemática dos alunos de todas as idades (NCTM, 2000). No entanto, a investigação mostra que o raciocínio matemático é pouco estimulado em muitas salas de aula (Stacey & Vincent, 2009; Harel & Sowder, 2007) sendo comum apresentar um resultado seguido de um exemplo da sua aplicação, sem justificar matematicamente a veracidade do resultado.

A criança começa a desenvolver a capacidade de argumentação, ainda antes de entrar para a escola, ao interagir com familiares e, mais tarde, ao aperceber-se de que o discurso argumentativo e, particularmente, o repertório de tipos de linguagem utilizada (corrente, coloquial, formal, científica, matemática, entre outras), lhe permite chegar a um consenso com os demais, aprendendo com eles e encontrando soluções para problemas em comum (Prusak et al., 2012). A linguagem natural tem, assim, um papel essencial na argumentação desenvolvida pelos alunos em sala de aula (Robotti, 2012) e os primeiros contactos com a argumentação passam por linguagem informal e alguns exemplos, evoluindo ao longo do tempo para argumentos mais complexos e com uma linguagem mais simbólica e formal (NCTM, 2000). A aprendizagem das justificações e provas não é feita no vazio. Deve partir dos conhecimentos que os alunos já têm sobre argumentação dentro e fora da sala de aula (Harel & Sowder, 2007).

A demonstração, enquanto ferramenta matemática, é um meio lógico, coerente e independente do utilizador, de provar um determinado resultado de uma forma inequívoca (Freitas, 2011). Este autor defende que é proveitoso desenvolver, nos alunos de todos os níveis de ensino, o gosto pela argumentação em geral e "pela demonstração como elemento central da própria Matemática" (p. 1). A demonstração é característica da Matemática, separando-a de todas as outras ciências, uma vez que depende apenas de propriedades e não dos objetos em si, ou seja, é independente da realidade, apesar de poder adequar-se a ela e, muitas vezes, modelá-la. Partindo de identidades ou de um conjunto finito de axiomas e seguindo uma sequência finita de operações lógicas devemos conseguir obter o resultado que queremos demonstrar se ele for verdadeiro (Harel & Sowder, 2007). A demonstração é, ainda, o objeto de estudo da Teoria da Demonstração, uma área particular da Lógica e tem, portanto, uma definição muito particular dentro das teorias formais (Balacheff, 2000).

Do ponto de vista da literatura na área de Educação, a demonstração é uma forma particular de argumentação matemática que tem vindo a ganhar importância nos currículos nacionais e internacionais (Rodrigues, 2000). Este autor constatou, na sua pesquisa com alunos do 9.º ano de escolaridade, que ao demonstrar conjeturas formuladas durante a resolução de uma tarefa investigativa, os alunos passaram a mostrar mais disponibilidade para efetuar generalizações, uma vez que passaram a ter um meio de verificar a veracidade das mesmas. No entanto, reunir condições favoráveis a que os alunos implementem processos de verificação de conjeturas, não é suficiente para assegurar que o façam, nem nos permite conhecer a natureza desses processos (Balacheff, 2000).

As palavras utilizadas na elaboração de questões a propor aos alunos podem fazer diferença nas estratégias de resolução adotadas por estes. Em particular, numa questão com enunciado do tipo 'mostre que…', o resultado é já dado como verdadeiro e o que está por descobrir é uma demonstração/prova que, da perspetiva do aluno, não só deve confirmar a veracidade do enunciado, mas também ser construída de tal forma que satisfaça as espectativas do professor, como afirma Balacheff (2000). O autor defende que "a demonstração proposta pode ser torpe, confusa, incompleta e insuficiente, sem que por isso seja falsa" (p. 5). Assim, o grau de formalização nunca se deve sobrepor, em termos de objetivos didáticos do professor, à clareza e correção matemáticas da argumentação usada pelo aluno (NCTM, 2000).

Usualmente, para o professor, os verbos justificar, mostrar e provar, são considerados sinónimos (Balacheff, 2000), no entanto podem ser estabelecidas definições diferentes para cada um destes termos. Balacheff (2000) propõe definições que permitem diferenciar as produções dos alunos e perceber até que ponto correspondem às espectativas do professor: (a) justificação é um processo de estabelecer a veracidade de uma proposição ao nível do sujeito locutor, ou seja, os argumentos utilizados prendem-se diretamente com os conhecimentos que o aluno possui e é utilizada a linguagem natural, pretendendo-se que o aluno explique 'nas suas palavras' o porquê de uma determinada afirmação; (b) a demonstração é um processo formal que segue regras bem definidas e que utiliza termos matemáticos e simbologia própria; (c) uma prova é reconhecida e aceite pelos outros, permitindo estabelecer a veracidade de uma proposição de uma forma correta e aceite pela comunidade matemática, mas sem recorrer necessariamente a um elevado grau de formalismo. O autor considera estas definições de uma forma inclusiva, ou seja, a prova é uma justificação que convence o próprio e os outros e a demonstração é uma prova em que o nível de formalização e simbologia é mais elevado.

Também podemos identificar nos alunos variadas formas de estabelecer a veracidade de uma asserção. Harel e Sowder (2007) afirmam que os alunos passam por fases de: (a) convicção externa em que a certeza é estabelecida porque o professor ou o manual assim o dizem, ou porque viram uma demonstração desse resultado que tinha um aspeto matematicamente válido (sem ter em atenção o seu conteúdo); (b) esquemas empíricos, nos quais estabelecem a verdade a partir da verificação de casos particulares ou da sua intuição sobre os mesmos; e (c) esquemas dedutivos que podem ser transformativos ou axiomáticos, ou seja, deduzindo propriedades umas das outras ou partindo de uma base finita de axiomas. Mason, et al. (1982) distinguem a justificação da prova no seu propósito. Para estes autores, uma justificação serve para respondes à questão "o que é verdade?" e uma prova ou demonstração serve para responder à questão "porque é verdade?". Outra distinção proposta por estes autores é a ideia de que a justificação convence o próprio, a prova convence um amigo e a demonstração convence até um inimigo.

Vários autores defendem que é necessário, não só pedir explicitamente justificações, provas e demonstrações, como também pedir aos alunos para investigar, comentar e verificar uma dada hipótese, porque o processo de validação está ligado a fins práticos, sendo através deste tipo de tomada de decisão justificada, que os alunos atribuem utilidade à demonstração, como meio definitivo de estabelecer a veracidade de uma asserção (Harel & Sowder, 2007; Balacheff, 2000). Este tipo de raciocínio é totalmente distinto do raciocínio empírico-indutivo em que o aluno tenta generalizar uma conclusão partindo de casos particulares, esquemas ou diagramas que servem para dar mais compreensão sobre a situação matemática em questão (Mason et al., 1982).

2.3 Tipos de prova

Freitas (2011) defende que, ao construir provas com os alunos, o professor deve equilibrar “a honestidade científica e a honestidade pedagógica” (p. 5), sendo que a primeira se prende com a correção ou a incorreção de um argumento e a segunda, com a adequação desse argumento aos alunos a quem é proposto. Quando tomamos uma decisão ou argumentamos com outra pessoa, pomos em curso processos de raciocínio dedutivo que podem ou não levar à construção de uma prova (Balacheff, 2000) e, logo, há que ter em conta diferentes níveis nas justificações produzidas pelos alunos que, estando corretas e rigorosas do ponto de vista matemático, têm diferentes graus de formalidade e simbologia (NCTM, 2000). Como Balacheff (2000) afirma,

> Já antes da existência do modelo euclidiano, os antigos matemáticos se valiam de meios de prova para estabelecer o caráter necessário de uma proposição ou de um resultado. Por outras palavras, a atividade matemática (…) é anterior à “invenção” da demonstração feita pelos gregos. Da mesma forma, (…) existe a possibilidade de os alunos construírem, antes de dominar a demonstração, provas dos enunciados matemáticos que eles próprios produzam. (p. 20)

Claro que um aluno do Ensino Secundário terá uma ideia diferente do que é uma prova matemática, daquela que tem um aluno do Ensino Superior, que por sua vez será diferente da de um investigador matemático (Harel & Sowder, 2007). Neste sentido, vários autores propõem classificações para os diferentes tipos de prova produzidos pelos alunos. Balacheff (2000) classifica as provas como: (a) as provas por exibição, em que as operações e conceitos são executados e não articulados, para compreender a prova basta olhar para ela (um exemplo destas provas são as provas geométricas ou as que resultam de tarefas do tipo ‘mostra que a área é dada por…’); (b) o exemplo genérico, em que o aluno explica a validade de uma asserção com base nas propriedades de um caso particular, mas olhando-o como representante de uma classe, ou seja, a argumentação é expressa em linguagem natural e apoiada a cada passo no caso particular explicitado e (c) as provas intelectuais (onde o autor inclui as demonstrações), que não dependem da ação sobre os objetos e se apoiam nas propriedades em jogo e na forma como se relacionam entre si.

Este autor defende ainda que, quando os alunos começam a produzir provas pragmáticas (provas do tipo (a) e (b)), usam a sua língua materna como meio de expressão e é necessário ajudá-los a converter a linguagem numa ferramenta para o cálculo lógico, progredindo em direção à simbolização e formalização da linguagem matemática. Para que essa evolução aconteça, é imprescindível: (a) uma descontextualização, ou seja, renunciar ao caso particular como objeto das ações e aceder às suas propriedades e à categoria a que pertence; (b) uma despersonalização, separando a ação do seu autor, ou seja, deixando de ter em conta as características pessoais de quem está a produzir a prova e de quem a vai ler; e (c) uma destemporalização, em que se deixa de ter em conta o espaço de tempo em que a situação se desenrola.

Uma outra classificação para a prova matemática é proposta por Harel e Sowder (2007) que as designa por referencial ou não referencial. As provas referenciais são contextualizadas sendo possível, a cada passo do processo, perceber a interpretação das expressões algébricas obtidas na situação em questão. Ao contrário, as provas não referenciais servem-se da manipulação algébrica e das suas regras como entidades próprias e independentes que não representam quantidades reais, nem têm uma interpretação em contexto. Estes autores apresentam seis principais razões para os alunos recorrerem a provas matemáticas: verificação, explicação, descoberta, sistematização, desafio intelectual e comunicação (Tabela 1) e defendem que as mesmas não são mutuamente exclusivas.

Tabela 1 - Razões para Usar Provas Matemáticas (Harel & Sowder, 2007)

Para que usar uma prova?	**O que é?**
Verificação	A prova é um meio de mostrar a veracidade ou falsidade de uma dada afirmação.
Explicação	Pretende-se, não só determinar a veracidade mas explicar porque é que a asserção é verdadeira.
Descoberta	No processo de prova podemos fazer descobertas, por exemplo podemos perceber que algumas das hipóteses não foram usadas, fazendo assim com que o resultado se aplique a uma classe maior, ou pelo contrário verificarmos que precisamos de restringir usando mais hipóteses.
Sistematização	É a apresentação de resultados de uma forma organizada, separando axiomas, teoremas, definições e resultados, organizando-os pela ordem em que podem ser deduzidos.
Desafio Intelectual	Ao construir uma prova, cria-se um sentimento de auto-realização que é prazeroso e motivador.
Comunicação	Refere-se ao significado, relevância e validade do resultado matemático provado.

2.4 Compreensão de uma demonstração

Além da capacidade de produzir provas, é esperado que os alunos tomem contacto com demonstrações de alguns resultados importantes ao longo da sua escolaridade (Silva et al., 2001). O objetivo pedagógico deste contacto é que os alunos compreendam estas demonstrações e possam aprender algo com elas (Harel & Sowder, 2007), mas é, ainda, pouco conhecida a extensão desta compreensão e o grau de validade e utilidade que os estudantes lhes atribuem (Meija-Ramos et al., 2012). Freitas (2011) defende que "a capacidade de compreender uma demonstração ou uma justificação teórica precisa de algum treino, é certo, mas é algo que se pode desenvolver se houver intenção de o fazer e clareza e sensatez nos objetivos a atingir" (p. 8). No seu trabalho de revisão de literatura, Harel e Sowder (2007) concluíram que os alunos, quando questionados sobre a utilidade de uma prova e o seu significado têm dificuldades em responder, sendo-lhes também difícil analisar uma prova e verificar se é válida ou contém erros.

Para que os alunos compreendam a utilidade da demonstração, precisam de abandonar a crença cega na autoridade externa do professor e desenvolvam uma confiança na sua capacidade de raciocínio como forma lógica de testar um argumento matemático (NCTM, 2000).

Tabela 2 - Aspetos de Compreensão Local (Meija-Ramos et al., 2012)

Dimensão Local	**O que é**	**Como avaliar** (alguns exemplos de questões a colocar)
Significado de termos ou afirmações	Para compreender qualquer tipo de texto é necessário perceber o significado de cada uma das palavras, símbolos ou afirmações utilizadas.	1. Explica por palavras tuas o significado de …? 2. Dá exemplo de um …? 3. Qual das seguintes afirmações é equivalente à afirmação anterior? 4. Quais das seguintes afirmações são consequência direta da afirmação anterior?
Valor lógico de cada passo e estrutura da demonstração	O aluno avalia o valor lógico de cada passo da demonstração e sabe reconhecer se se trata de uma demonstração no sentido direto, por contra-recíproco, por absurdo, por indução, etc.	1. Nesta demonstração, qual é a razão de fazermos esta suposição? 2. Qual a razão de considerarmos este caso particular? 3. Qual o tipo de demonstração utilizada?
Justificação das afirmações	Em alguns casos, o leitor tem de inferir que proposições anteriores permitem deduzir uma nova asserção dentro da prova.	1. Porque é que … implica …? 2. Que passos anteriores desta prova, nos permitem concluir …? 3. Em que parte da demonstração é que foi utilizada esta informação?

Meija-Ramos et al. (2012) propõem uma denominação para diferentes aspetos de compreensão de uma demonstração (que não pretende ser hierarquizada) e sugerem formas diretas de avaliá-los através de questões a colocar aos alunos. Esses aspetos de compreensão são divididos em duas dimensões, local (Tabela 2) e holística (Tabela 3), consoante requeira a compreensão de cada passo da demonstração ou a compreensão da ideia geral da demonstração.

Tabela 3 - Aspetos de Compreensão Holística (Meija-Ramos et al., 2012)

Dimensão Holística	**O que é**	**Como avaliar** (alguns exemplos de questões a colocar)
Resumir as ideias principais da demonstração	Compreender a holística de uma demonstração passa por ser capaz de em breves palavras resumir a ideia geral da mesma.	1. Faz um resumo, por palavras tuas, desta demonstração.
Identificar a estrutura modular	Muitas demonstrações de resultados importantes contêm, subdemonstrações ou pequenos lemas que, apesar de poderem ser encarados separadamente, são essenciais para a demonstração principal.	1. Divide a demonstração em etapas/módulos. 2. Para que serve esta etapa da demonstração? 3. Poderíamos trocar a ordem destas duas etapas? Porquê?
Transferir as ideias gerais para outro contexto	É importante ser capaz de aproveitar ideias de uma certa demonstração para aplicar noutras situações.	1. Como procederias para provar …? (usando um teorema similar ao provado anteriormente) 2. Explica que ideias da demonstração anterior podem ser usadas para provar …?
Ilustrar a demonstração	Ser capaz de percorrer os vários passos da demonstração usando um exemplo particular ou criar um diagrama com as ideias da prova, são formas de a ilustrar.	1. Aplica a ideia da demonstração a um caso particular. 2. Constrói um diagrama com as ideias da prova

Quando se trata de compreender uma demonstração, existem outros aspetos referidos na literatura a ter em consideração. Por exemplo, segundo Harel e Sowder (2007), para compreender uma demonstração matemática é essencial ter algumas noções de lógica, como por exemplo compreender o significado matemático de uma implicação, uma vez que em linguagem natural, uma afirmação do tipo 'se…, então…' significa, na verdade, aquilo que em matemática é uma equivalência (se e só se). É também essencial saber separar os dados das hipóteses (Mason et al., 1982), ou seja, aquilo que é dado como sendo válido ou já provado anteriormente e aquilo que admitimos como verdadeiro a uma dada altura da demonstração como auxiliar para provar, por exemplo, uma implicação. Para além disso, os estudantes devem perceber a validade de um argumento por contra-recíproco, reconhecer que basta um contraexemplo para provar que uma afirmação é falsa e apropriar-se dos significados matemáticos da conjunção e disjunção (Harel & Sowder, 2007), uma vez que na linguagem natural o "ou" é muitas vezes exclusivo e em Matemática não é assim.

Os resultados de estudos sobre a compreensão de demonstrações mostram que a generalidade dos alunos considera que as demonstrações só servem para provar o que eles já sabem e não reconhecem utilidade em demonstrar algo que lhes parece evidente. Além disso, os alunos apresentam dificuldades em produzir provas e demostrações e quando o fazem, tentam ir de encontro às espectativas do professor, usando o mesmo tipo de linguagem que este, não porque apreciem a economia da linguagem matemática mas porque terão 'melhor nota' se a utilizarem (Harel & Sowder, 2007).

2.5 A argumentação nos documentos curriculares

Segundo Rodrigues (2010), "a relevância da integração curricular da demonstração em Matemática, desde os níveis mais básicos de escolaridade, tem sido sublinhada por vários autores do campo da educação matemática" (p. 1). Em França, a demonstração aparecia já como objeto de estudo no Ensino Secundário no programa de 1985 (Balacheff, 2000) e no Japão o processo de demonstração é ensinado como um subtema de Geometria (Harel & Sowder, 2007). Na Austrália (Stacey & Vincent, 2009), assim como nos Estados Unidos da América (NCTM, 2000), é introduzida desde o Ensino Básico como tema transversal. Os Princípios e Normas do NCTM (2000) reservam um capítulo intitulado Raciocínio e Demonstração com indicações sobre os tipos de raciocínio (indutivo e dedutivo) e as justificações matemáticas com diferentes graus de formalismo que devemos esperar que os alunos consigam produzir em cada grau de ensino (incluindo na pré-escola).

No que diz respeito a Portugal, "validar conjeturas", "fazer raciocínios demonstrativos" e "comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico" (p. 4-5) aparecem no atual Programa de Matemática A do Ensino Secundário (Silva et al., 2001) como capacidades/aptidões gerais a desenvolver ao longo deste ciclo. Um dos temas transversais considerados pelos autores é Lógica e Raciocínio Matemático e, nas indicações metodológicas gerais, vem referido que estas questões devem ser utilizadas e abordadas quotidianamente e progressivamente e não ser lecionadas como conteúdo em si.

As noções de Lógica que ajudem a clarificar processos e raciocínio, assim como a simbologia e linguagem formal, características da Matemática, devem ser introduzidas gradualmente e integrar o quotidiano da aprendizagem matemática dos alunos (Silva et al., 2001). Na Tabela 4, encontram-se algumas das indicações metodológicas do Programa para o desenvolvimento da Lógica e Raciocínio no Ensino Secundário.

Tabela 4 - Temas Transversais- Lógica e Raciocínio (Silva et al, 2001, pp 21-22)

Desenvolvimento (Lógica e Raciocínio)	Indicações Metodológicas
• Noções de lógica	Todas as noções de lógica e teoria de conjuntos devem ser introduzidas à medida que vão sendo precisas ou recorrendo a exemplos concretos de matéria usada: resolução de equações e inequações, propriedades dos módulos, propriedades das funções (…) Terá de haver referências simultâneas a operações com condições e operações com conjuntos bem como à implicação formal e inclusão, para além das referências a algumas propriedades como a transitividade. Assuntos como a lei da conversão, as primeiras leis de De Morgan e os quantificadores não podem deixar de aparecer à medida que forem necessários.
• Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração. Métodos de demonstração.	No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). (…) O hábito de pensar corretamente, (…) deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito e, sempre que possível, os estudantes devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações (que não são mais do que novos problemas, por vezes dentro de outros problemas cuja resolução carece de ser comprovada). (…) A abordagem de algumas demonstrações diretas e indiretas (e nestas, a demonstração por redução ao absurdo) é inevitável. Assumem também uma grande importância demonstrações utilizando contraexemplos.
• Reflexão sobre as heurísticas de Polya para a resolução de problemas. Atividades investigativas.	(…). Estas organizações de pensamento são úteis para todos os aspetos da vida e não só para a Matemática. Sempre que possível, (…) os estudantes devem ser envolvidos em atividades de natureza investigativa genérica (…). A introdução e o desenvolvimento de todos estes temas é facilitador do ”desenvolvimento da linguagem e do simbolismo para comunicar ideias matemáticas” de modo que os estudantes ”reflitam sobre, e clarifiquem, o seu pensamento matemático no que diz respeito às noções e relações matemáticas, formulem definições matemáticas e exprimam generalizações descobertas através de investigações, exprimam as noções matemáticas oralmente e por escrito (…) e apreciem a economia, o poder e a elegância da notação matemática bem como o seu papel no desenvolvimento das ideias matemáticas.” (…) estes temas (…) são facilitadores de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, pelas oportunidades de formular e testar conjeturas e analisar contraexemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações.

É importante apelar à discussão entre os alunos, para que estes verbalizem os seus raciocínios, argumentando matematicamente, com lógica e rigor, levando-os a desenvolver uma apreciação pela precisão e poder de síntese da linguagem matemática. Os autores deste programa reforçam bastante esta ideia de que a demonstração deve estar presente ao longo de todo o percurso escolar dos alunos e que, mesmo as ideias apresentadas de forma intuitiva ou informal, devem ser rigorosas e corretas matematicamente. Declaram ainda que “não se pretende que a matemática ou matemáticas sejam introduzidas axiomaticamente, mas pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente” (Silva et al., 2001, p 19). Este programa também recomenda que os alunos sejam incitados a “justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjeturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas” (p. 11).

Uma das formas mais difundidas de ensino das demonstrações e meios de prova em geral é a imitação. O professor faz algumas provas no quadro e espera-se que os alunos produzam provas do mesmo tipo e usando mais ou menos o mesmo tipo de linguagem (Balacheff, 2000). No entanto, a apresentação de demonstrações, não pode substituir a atividade de descoberta de regularidades a partir de casos particulares (Freitas, 2011) e não podemos esperar que os alunos produzam demonstrações formais, ou mesmo provas *intelectuais* de qualquer espécie, sem primeiro produzirem algumas provas por *exibição* ou sem compreenderem e usarem o *exemplo genérico* (Balacheff, 2000; NCTM, 2000). A ênfase que o professor dá às demonstrações e meios de prova em geral, assim como às relações lógicas e a linguagem matemática, tem um papel muito importante na forma como os alunos desenvolvem a sua argumentação (Harel & Sowder, 2007).

2.6 Perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem das funções

Freitas (2011) afirma que, usualmente, se insiste mais na formalização de demonstrações no tópico de Probabilidades do 12.º ano mas que há temas anteriores em que a argumentação poderia ser mais explorada, nomeadamente no tópico de Funções do 11.º ano. De facto, este Programa (Silva et al., 2001) indica as propriedades das funções como uma boa temática para abordar linguagem simbólica e noções de lógica. Nas indicações metodológicas específicas deste tema, os autores do Programa afirmam que os alunos “devem ser incentivados a elaborar conjeturas, evitando conclusões apressadas, sendo sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões". Os autores da Brochura de Funções do 11.º ano (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1998) também salientam a importância de articular os conceitos deste tema com a aprendizagem de competências como generalizar, identificar regularidades e formular e testar conjeturas.

O Programa Nacional de matemática A do Ensino Secundário (Silva et al., 2001) divide os conteúdos a lecionar em quatro grandes temas: (1) cálculo diferencial; (2) geometria (no plano e no espaço); (3) funções e sucessões; e (4) probabilidades (com análise combinatória) e estatística. Os autores referem que a Álgebra, está presente, apesar de se encontrar distribuída pelos outros temas. Este Programa defende que as Funções devem proporcionar aos alunos, "uma formação para a vida tão básica como a tabuada" (p. 26), uma vez que são essenciais para a compreensão de diversos fenómenos da vida corrente e são usadas em diversas disciplinas escolares (como a Física, a Química, a Economia ou a Geografia), ao longo de toda a escolaridade dos alunos. As funções devem sempre ser estudadas do ponto de vista gráfico e algébrico estabelecendo relações entre estas representações e sabendo reconhecer as potencialidades e limitações de cada uma delas no estudo de certas características de cada função. Além disso, os alunos devem estudar propriedades de diversos tipos de funções (polinomiais, trigonométricas, racionais, irracionais, exponenciais e logarítmicas) ao longo deste ciclo e usá-las para modelar fenómenos da realidade.

Ao nível das recomendações curriculares internacionais, as normas do NCTM (2000) preconizam que, no Ensino Secundário, os alunos devem saber identificar uma correspondência como função, investigar zeros, pontos de interseção com os eixos e assíntotas. Os alunos devem, ainda, aprender operações aritméticas entre funções, composição e inversão de funções e compreender e comparar as propriedades de algumas classes de funções incluindo as polinomiais, racionais e funções trigonométricas e com radicais. Um foco essencial do ensino das funções deve ser a intermutabilidade entre representações de uma mesma função. Os alunos devem compreender que em certas situações pode ser mais vantajosa uma representação em tabela (por exemplo se a variável for discreta), noutras situações a representação gráfica pode ajudar a perceber o comportamento geral da função e a representação algébrica permite determinar zeros, extremos ou pontos de descontinuidade de forma exata.

Leinhardt et al. (1990) realizaram uma revisão de literatura sobre o ensino e aprendizagem das funções e apontam como principal razão o facto de uma grande parte da investigação sobre educação matemática se focar nos primeiros anos escolares e as funções só serem abordadas nos últimos anos do Ensino Básico ou até mais tarde. De facto, em Portugal, assim como nos Estados Unidos da América, são abordadas pela primeira vez no 3.º ciclo do Ensino Básico (NCTM, 2000). Apesar de serem tardiamente abordadas como tópico escolar, as funções aparecem desde muito cedo no quotidiano dos alunos sob a forma de gráficos e tabelas, nos jornais e na televisão (Leinhardt et al., 1990; Siqueira & Beust, 2008). A definição de função aceite atualmente na comunidade matemática, como conjunto de pares ordenados com a propriedade de não haver dois pares com a primeira coordenada igual, permite que as funções possam ser, ou não, numéricas e que vários objetos tenham a mesma imagem. Muitas destas correspondências não eram reconhecidas como funções antes do século XIX (Leinhardt et al., 1990).

Uma função real de variável real pode ser definida univocamente através da sua representação gráfica ou da sua expressão algébrica, indicando o domínio, mas para compreender completamente o comportamento e propriedades de uma determinada função é necessário conjugar e articular estes dois sistemas simbólicos de representação, que têm naturezas muito diferentes. O tema das funções é o primeiro em que os alunos usam simultaneamente raciocínios algébricos e estratégias de simplificação de expressões e resolução de equações e inequações próprias da Álgebra, juntamente com noções como simetria, coordenadas de pontos no plano cartesiano e conceitos como reta, parábola ou hipérbole, próprios da Geometria (Leinhardt et al., 1990). Esta inter-relação permite aos alunos desenvolver o raciocínio matemático e a argumentação ao usarem alternadamente argumentos algébricos e geométricos (Magalhães & Martinho, 2011; Teixeira et al., 1998).

Na tabela 5, encontram-se sumarizados os principais processos que, segundo Leinhardt et al. (1990), são desenvolvidos pelos alunos quando abordam tarefas do tema das funções. Estes autores destacam os processos de interpretar e construir, particularizando-os nas ações: prever, classificar, traduzir e escolher a escala. Estes processos verificam-se, tanto em raciocínios gráficos como algébricos.

Tabela 5 - Processos relacionados com a aprendizagem de funções (Leinhardt et al., 1990)

Processos	O que é?	Ações particulares
Interpretar	Compreender e atribuir significado a um gráfico (ou parte de um gráfico), a uma expressão algébrica ou a uma situação de dependência entre variáveis. Pode ser uma interpretação geral (exemplos: forma do gráfico, intervalos de monotonia) ou local (exemplos: imagem de um determinado objeto, zeros).	**Prever:** perceber qual a posição de pontos não representados do gráfico a partir de uma parte já representada ou prever a forma do gráfico a partir da sua expressão. Muitas vezes é possível considerar mais do que uma solução e não há, usualmente, informação suficiente para ter a certeza da previsão feita.
		Classificar: decidir se uma correspondência é uma função; identificar uma função entre outras relações apresentadas sob várias representações (tabela, gráfico, expressão, diagrama sagital); ou identificar uma determinada classe de funções de entre outras (função afim, linear, quadrática, racional, entre outras).
Construir	Gerar algo novo, como por exemplo criar uma representação gráfica de uma função, representar alguns pontos no plano cartesiano ou escrever a expressão algébrica de uma função.	**Traduzir:** reconhecer uma mesma função nas suas diferentes representações e construir uma representação de uma função dada outra, por exemplo, dado o gráfico escrever a expressão algébrica ou representar em tabela.
		Escolher a escala: selecionar a unidade a considerar em cada eixo coordenado, a escala a adotar ou a janela de visualização na calculadora gráfica.

Siqueira e Beust (2008) referem que os alunos têm, usualmente, bastantes dificuldades no tema das funções, uma vez que o conceito de função é, na sua essência, complexo e atualmente, quando é lecionado pela primeira vez, são simultaneamente definidos inúmeros conceitos tais como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objeto, imagem, entre outros. Estes autores alertam para a necessidade de os alunos compreenderam e aplicarem na resolução de tarefas a ideia de que uma das variáveis é dependente da outra, abordando este tema de uma forma articulada com a realidade dos alunos, antes de formular a definição formal de função. As tarefas de contexto real são propícias à compreensão do conceito de variável e de domínio e contradomínio (Leinhardt et al., 1990).

Segundo Leinhardt et al. (1990), uma dificuldade encontrada pelos alunos no estudo de funções é que a natureza de uma variável não é sempre a mesma. As variáveis podem ser não numéricas ou numéricas e, neste caso, contínuas ou discretas. O conceito de variável e o conceito de função são compreendidos paralelamente pelos alunos não havendo um que preceda claramente o outro. Vários estudos concluem que os alunos devem ser solicitados a fazer estudos qualitativos da função como um todo (interpretação geral), antes de pedir para calcular imagens de certos objetos (interpretação local). O autor destaca a complexidade da ação de traduzir uma função da sua representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa. Quando temos a representação gráfica e queremos escrever a expressão algébrica da função temos de: (1) compreender de que forma a variável dependente se obtém a partir da variável dependente; (2) saber reconhecer pelo formato do gráfico, qual o tipo de função em questão (afim, quadrática, racional, trigonométrica, por ramos), (4) conhecer a expressão geral de funções desse tipo, e (5) encontrar uma forma de determinar os parâmetros da expressão nesse caso particular.

Quando temos uma expressão algébrica, temos de: (1) perceber o domínio e contradomínio para escolher uma escala adequada para cada eixo coordenados; (2) perceber, pelo tipo de expressão, a forma geral que o gráfico vai tomar (parábola, reta, hipérbole); e (3) calcular as imagens de alguns pontos, escolhidos criteriosamente (como zeros ou extremos). Outra dificuldade apontada por Leinhardt et al. (1990) é que os alunos têm uma grande tendência para a linearidade. Por exemplo, em muitos casos os alunos usam proporções ou regras de três simples para determinar o valor de uma variável dependente de outra, assumindo que estas são linearmente dependentes. Outro exemplo é quando os alunos são solicitados a desenhar um gráfico que passe por determinados pontos, há um grande tendência para que os unam usando segmentos de reta e não curvas. Esta tendência pode levá-los a formular conjeturas falsas ou a argumentar de forma errónea.

O estudo empírico de Siqueira e Beust (2008) permitiu-lhes concluir que é importante trabalhar a noção de caracterização e igualdade de funções destacando o domínio como parte fundamental da definição de uma determinada função, pois constataram que os alunos muitas vezes negligenciam este aspeto. Estes autores recomendam, ainda, que os alunos tomem contacto com alguns gráficos não padronizados (que não correspondem a nenhuma expressão algébrica) para que percebam que as funções modelam fenómenos da vida real que nem sempre podem ser descritos por expressões conhecidas. Ao interpretar gráficos, os alunos têm em conta a situação que o gráfico está a representar (Leinhardt et al., 1990) podendo ser em contexto puramente matemático ou real e podem usar a informação fornecida pelo gráfico para argumentar matematicamente.

Siqueira e Beust (2008) concluem, igualmente, que vários estudos evidenciam que os alunos têm mais facilidade em lidar com funções na forma gráfica do que na forma algébrica porque esta representação apresenta simultaneamente a regra de correspondência, o domínio e o contradomínio, dando uma visão geral e imediata do comportamento da função. Nestes casos, a calculadora gráfica pode ser uma ferramenta de auxílio na argumentação gráfica, uma vez que as tarefas nem sempre têm o gráfico já representado em referencial cartesiano e é mais moroso representá-lo manualmente. No seu estudo sobre a influência da calculadora no desenvolvimento da argumentação matemática, Magalhães e Martinho (2011) concluíram que

> “A calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta fulcral, na medida em que ajudou os alunos na compreensão da tarefa, assim como na validação ou rejeição das conjeturas que previamente foram formuladas, desenvolvendo a capacidade de argumentar em matemática.” (p. 12)

Tradicionalmente, os alunos desenhavam apenas um gráfico de uma dada função usando uma escala que lhes parecesse apropriada. Ao usar a calculadora, os alunos podem produzir muitos mais gráficos com diferentes janelas de visualização e com um rigor muito grande (Leinhardt et al., 1990). Esta ferramenta permite-lhes estabelecer comparações, analisar influências de parâmetros e formular conjeturas com uma maior segurança, fornecida pela abrangência de exemplos (Mason et al., 1982). É importante, no entanto, que os alunos percebam em cada caso, se a argumentação gráfica é suficiente como prova ou se é necessário usar argumentação algébrica para validar a sua conjetura (Leinhardt et al., 1990; Magalhães & Martinho, 2011).

3. Unidade de ensino

3.1 Caracterização do contexto escolar

A Escola Secundária D. Luísa de Gusmão está inserida desde Junho de 2012 no Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves, que se situa na zona antiga da cidade de Lisboa e que abrange alunos oriundos das freguesias: Anjos, Graça, Pena e Penha de França. Os outros estabelecimentos de ensino que compõem o agrupamento são: Jardim de Infância da Pena, EB1 nº 1, EB1 dos Anjos, EB1 Natália Correia, EB1 Victor Palla e EB 2.3 de Nuno Gonçalves, esta última Escola Sede. O agrupamento tem uma realidade profundamente multicultural, onde 22,8% dos alunos não nasceu em Portugal, representando mais de 26 países. A maioria dos encarregados de educação da sua população estudantil apresenta baixas qualificações escolares e profissionais e 38,9% dos alunos usufruem de Apoio Social Escolar (A.E.N.G., 2013b).

A oferta formativa da Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão, no Ensino Secundário, compreende cursos Científico-Humanísticos e Cursos Profissionais sendo que, neste ano letivo, estiveram disponíveis os cursos Científico-Humanísticos de Ciências Socioeconómicas e Artes Visuais (A.E.N.G., 2013a), havendo neste momento duas turmas de 10.º ano "híbridas", ou seja: uma tem alunos do curso de Ciências Socioeconómicas e de Ciências e Tecnologias e outra tem alunos de Artes Visuais e de Línguas e Humanidades. Esta escola é frequentada por mais de 600 alunos, sendo menos de metade destes do Ensino Secundário. Os edifícios que compõem a Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão apresentam um elevado grau de degradação (A.E.N.G., 2013b). A sua requalificação estava prevista ao abrigo da iniciativa Parque Escolar, contudo acabou por não usufruir da mesma. O mobiliário escolar encontra-se bastante degradado em algumas salas, e os recursos informáticos são obsoletos, não existindo computador nem projetor nas salas de aula.

Esta unidade de ensino foi lecionada numa turma de 11.º ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias que tem como língua estrangeira o Inglês e como disciplinas optativas específicas Física e Química A e Biologia e Geologia. A turma é composta por: 17 alunos inscritos (dos quais dois se encontram a repetir o ano) e dois alunos assistentes; 13 raparigas e seis rapazes; as idades dos alunos estão compreendidas entre os 16 e os 19 anos, com a grande maioria dos alunos a iniciar o ano letivo com 16 anos (Figura 1).

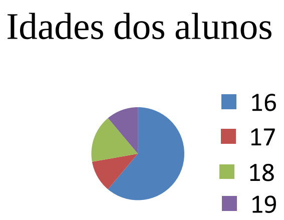


Figura 1. Idades dos alunos da turma no início do ano

A turma está em continuidade pedagógica com a Professora Orientadora Cooperante desde o 10.º ano e, dos 19 alunos que a compõem, 10 terminaram o 10.º ano com classificação negativa, dois dos quais inferior a sete valores (Figura 2).

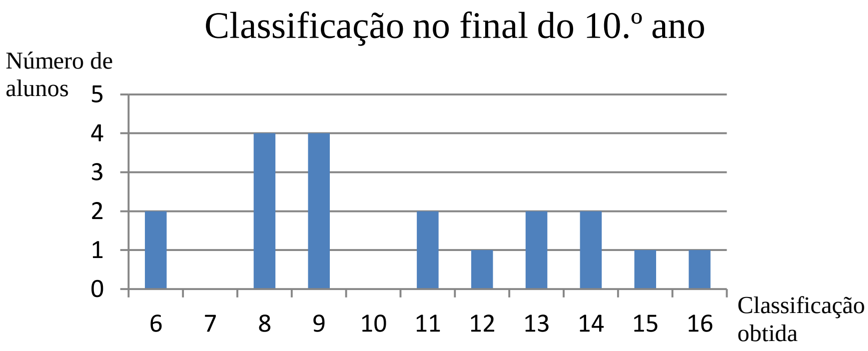


Figura 2. Classificação no final do 10.º Ano

Os alunos da turma são trabalhadores, empenhados e participativos sendo, no entanto, muito dependentes do professor para validar o seu trabalho (caracterização partilhada por todos os professores e constante do Plano de Atividades da Turma). Os alunos apresentam poucos mecanismos de auto-regulação (Santos, 2008) e quando a sua resposta difere das soluções do manual não tentam perceber o porquê e solicitam imediatamente a ajuda do professor. Revelam, ainda, alguma falta de conhecimentos de procedimentos de cálculo (nomeadamente na resolução de equações e sistemas). Nas palavras da Professora Orientadora Cooperante: "É uma turma que não tem alunos brilhantes (as melhores notas do ano passado foram um 15 e um 16), mas são muito trabalhadores". A turma tem três aulas de Matemática por semana, sendo as aulas de segunda e quarta-feira em bloco de 100 minutos e as aulas de terça-feira apenas de 50 minutos. Praticamente em todas as aulas são propostos trabalhos para casa e os alunos na sua generalidade costumam corresponder, a não ser em situações pontuais, nomeadamente dias que antecedem testes de outras disciplinas.

Um aspeto que se destaca da observação das aulas a que assisti no primeiro período letivo é que esta turma não tem sempre o mesmo ritmo de trabalho, havendo dias em que todos os alunos se empenham nas tarefas com um enorme entusiasmo e outros dias em que parece que não têm vontade de trabalhar. Se atendermos ao trabalho em sala de aula, é possível identificar três grupos com características distintas: (a) um grupo de quatro a seis alunos que trabalha mais devagar que os restantes e que depende muito do trabalho do colega do lado ou do que é resolvido no quadro para avançar, chamando poucas vezes o professor para esclarecer dúvidas e que raramente respondem a perguntas colocadas à turma, ou expõem voluntariamente as suas resoluções no quadro; (b) um grupo de dois a cinco alunos que trabalha mais depressa e de modo mais autónomo que os restantes alunos e acaba por fazer mais tarefas do que as planificadas pelo professor; (c) os restantes alunos da turma que trabalham a um ritmo regular, chamam o professor sempre que precisam de esclarecer questões, participam nas discussões e oferecem-se regularmente para ir ao quadro.

No final do 1.º período do presente ano escolar, as classificações, na disciplina de Matemática A, dos alunos inscritos, encontram-se entre os 4 e os 15 valores, sendo que oito alunos têm classificação negativa e nove alunos têm classificação positiva (Figura 3).

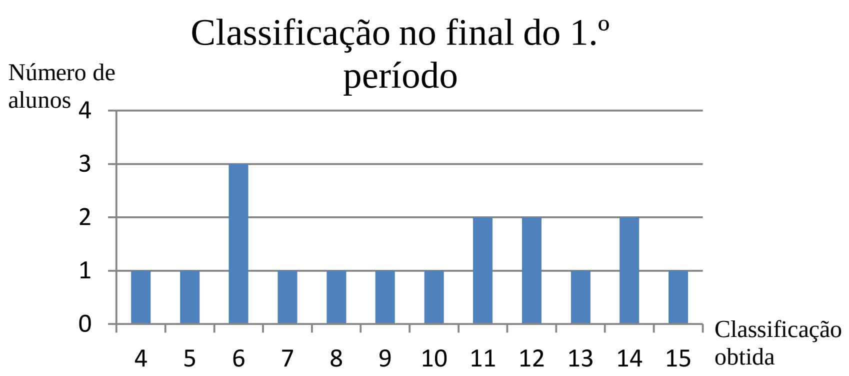


Figura 3. Classificação a Matemática no final do 1.º período

A média das classificações da turma é de 9,59 valores. No que diz respeito às atitudes e valores, a turma tem, na disciplina de Matemática A, uma classificação de Bom ao nível do respeito e de Muito Bom ao nível da responsabilidade. Fazendo a média de todas as disciplinas, a turma obteve uma classificação de Bom em ambas as componentes. Há no final do primeiro período, sete alunos com mais de três disciplinas com classificação negativa.

3.2 Ancoragem da unidade de ensino no programa

A prática letiva sobre a qual se debruça este estudo foi desenvolvida no tema Funções, no 11.º ano, tendo por base as orientações preconizadas no Programa de Matemática A (Silva et al., 2001). As Funções são estudadas pela primeira vez no 7.º ano do 3.º ciclo e têm uma prevalência crescente em cada ano de escolaridade até ao final do Ensino Secundário. No 10.º ano, os alunos abordam diversas características das funções como: domínio, contradomínio, zeros, sinal, paridade, continuidade, injetividade, variação e extremos, sempre com base em propriedades gráficas. Estudam ainda várias famílias de funções: afim, quadrática, polinomial e módulo (Silva et al., 2001).

No 11.º ano, antes da minha intervenção, os alunos já tinham abordado os seguintes tópicos que dizem respeito ao tema das funções: “funções seno, cosseno e tangente; estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções: $f(x) = a + [\, b / (cx+d)]$; conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$ e funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos)” (Planificação a Médio Prazo - Matemática A - 2013/2014). O Programa Nacional de Matemática A (Silva et al., 2001) preconiza que deve ser dado destaque a funções que relacionem variáveis com significado em contexto real para que os alunos atribuam significado e compreendam a utilidade prática dos conceitos aprendidos. É, também importante relacionar conceitos deste tema com os de outros temas matemáticos e com conceitos estudados em anos anteriores, para que os alunos encarem a matemática como um todo e tenham oportunidades de consolidar e relembrar os conhecimentos que já têm. Em relação ao uso da calculadora gráfica no tema das Funções, o Programa preconiza que ”os estudantes devem observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas; devem sempre traçar um número apreciável de funções, tanto manualmente (…) como usando calculadora gráfica ou computador, escolhendo o melhor retângulo de visualização” (p. 27).

A sequência das aulas lecionadas foi planeada para quinze aulas de 50 minutos nas quais serão abordados os tópicos: (1) operações com funções; (2) função inversa; e (3) funções com radicais. Para o primeiro, o Programa (Silva et al., 2001) estabelece como aspetos a abordar “soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2.º e 3.º grau” (p. 38). No mesmo documento, podemos ler que no tópico da função inversa, “os estudantes precisam de analisar os casos em que será possível inverter uma função” (p.38). O Programa dá como orientação metodológica que se mencione a definição algébrica de injetividade apenas como noção auxiliar, uma vez que os alunos já trabalharam com esta noção de um ponto de vista de análise gráfica no 10.º ano. Ainda neste tópico, Silva et al. (2001) indicam que os alunos devem constatar a relação entre os gráficos de uma função invertível e da sua inversa.

Em relação ao tópico sobre funções com radicais (também chamadas de funções irracionais), os autores sugerem que deve ser introduzido o conceito de raiz índice n de um número real (ou real não negativo nos casos em que n é par) de uma forma algébrica antes de explorar as funções com radicais como inversas das funções potência. Devem trabalhar-se “funções com radicais quadráticos ou cúbicos; operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fracionário; simplificações de expressões com radicais” (Silva et al., 2001, p. 38). O programa dá ainda exemplos do nível de dificuldade a não ultrapassar ($\sqrt{x+3}$ ou $\sqrt[3]{x+4}$) e indica que, uma possível aplicação das funções com radicais, é a “obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal” (p. 7). Este tópico tem como objetivo ampliar os conhecimentos do 10.º ano relativos a funções, ao estudar uma nova classe de funções (as funções com radicais) tanto algébrica como graficamente.

Na Tabela 6 encontra-se uma adaptação da parte da planificação a médio prazo, elaborada pela Professora Orientadora Cooperante no início do ano letivo de acordo com as indicações do Programa e correspondente às subunidades sobre as quais incidiu a minha prática letiva.

Tabela 6 - Adaptado de: Planificação a Médio Prazo - Matemática A - 2013/2014

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão
Planificação a Médio Prazo - Matemática A - 2013/2014

Tópicos	**Objetivos**	**Estratégias**	**Materiais e Recursos**	**Nº blocos letivos** (100 min.)
Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau. Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos; Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente Fracionário; Simplificação de expressões com radicais.	- Ampliar os conhecimentos relativos a funções. - Operar com funções. - Estudar funções inversas e funções compostas.	- Estudar as seguintes propriedades das funções (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos, simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos). - Continuar a exploração das potencialidades da calculadora gráfica. - Analisar os casos em que é possível inverter uma função e constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. - Introduzir a noção de raiz índice *n*. - Na determinação da função inversa da função potência não ultrapassar o grau de dificuldade associado a: $\sqrt{x+3}$, $\sqrt[3]{x+4}$	Fichas, acetatos, calculadora gráfica, manual.	3 3

As primeiras quatro aulas da minha intervenção estavam reservadas para as operações com funções, depois mais duas para lecionar a função inversa e, por fim, mais três para as funções com radicais (Tabela 6). Estas aulas estão divididas em dois blocos: o primeiro entre 17 e 26 de Fevereiro e o segundo entre 12 e 18 de Março. A razão deste desfasamento temporal é que a interrupção letiva do Carnaval ocorreu de 3 a 5 de Março e o Teste Intermédio de Matemática A do 11.º ano foi realizado no dia 11 de Março, tendo a aula de dia 10 ficado reservada para esclarecimento de dúvidas e tendo sido lecionada pela professora da turma.

Tabela 7 - Planificação geral da intervenção

Subunidade	Data da Aula	Duração da Aula (minutos)	Tópicos da Aula	Tarefas a Aplicar (Anexo B)
Operações com Funções	17/02	100	- Igualdade de funções; - Soma, diferença, produto e quociente de funções.	-Tarefa “Igualdade de Funções” -Tarefa 26 da pág. 98 do manual
	18/02	50	- Propriedades de algumas operações com funções.	- Tarefa “Estudar a Paridade”
	19/02	100	- Função composta.	- Tarefa “Composição de Funções”
	24/02	100	- Propriedades da função composta; - Função identidade; - Funções inversas (uma da outra).	- Tarefa “Algumas propriedades da composição de funções” - Tarefas de consolidação sobre a subunidade
Função Inversa	25/02	50	- Função invertível; - Determinar a função inversa.	- Tarefa 102 da pág. 108 do manual
	26/02	100	- Relação entre o gráfico da função inversa e o da original	- Tarefa “Uma investigação sobre funções inversas” - Tarefa 108 da pág. 113 do manual
Funções com Radicais	12/03	100	- Raízes de índice n; - Operações com radicais; - Funções com radicais.	- Tarefas sobre operações com radicais - Tarefa 46 da pág. 148 do manual
	17/03	100	- Expoentes fracionários; - Equações com radicais; - Equivalência e implicação.	- Tarefas sobre funções com radicais - Tarefa 122 da pág. 121 do manual - Tarefa 32 da pág. 125 do manual
	18/03	50	- Funções irracionais como inversas das funções potência.	- Tarefa 124 da pág. 123 do manual
	19/03	20 (final da aula)	- Entrega e discussão do enunciado do relatório escrito individual	- Relatório escrito individual: “As equações irracionais e a elipse”

Os tópicos que escolhi lecionar, estavam inicialmente previstos para o início do terceiro período, mas em Dezembro saiu a informação preliminar sobre os conteúdos do teste intermédio que indicava que as operações com funções seriam alvo de avaliação neste teste. Por isso houve necessidade de alterar a ordem prevista dos conteúdos e a minha intervenção letiva passou para bastante mais cedo. Era, portanto, imperativo cumprir as aulas previstas para cada um dos subtemas porque os alunos iriam ser avaliados externamente sobre essas temáticas. Assim, uma grande preocupação que tive desde o início da planificação e escolha de tarefas, foi garantir que todos os conceitos e procedimentos essenciais de cada tópico eram abordados na aula prevista e não se arrastavam para a aula seguinte.

3.3 Conceitos Matemáticos

Neste capítulo, apresentam-se os principais conceitos matemáticos relacionados com a unidade didática lecionada. Quer os que foram diretamente abordados neste conjunto de aulas, como alguns abordados em unidades anteriores ou no 10.ºano, assim como algumas definições que não fazem parte do currículo escolar dos alunos, mas que são necessárias para definir formalmente os conceitos lecionados. Todas as definições e proposições abaixo estão de acordo com Ferreira (1988) e Sebastião e Silva (1974).

<u>Notações utilizadas:</u>

- Escrevemos $a = b$, para afirmar que a e b são designações de um mesmo objeto. Para negar esta afirmação escrevemos $a \neq b$.

- Sendo A e B conjuntos, designaremos por $A \backslash B$ o conjunto formado pelos objetos que pertencem a A e não pertencem a B, isto é,

$A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$.

- (a, b) é o par ordenado de primeira coordenada a e segunda coordenada b.

A definição de função que apresento caracteriza-a como uma relação (ou correspondência) entre conjuntos com a propriedade de não existirem dois pares ordenados diferentes, com a primeira coordenada igual, que lhe pertençam.

<u>Definição de produto cartesiano de dois conjuntos:</u> Dados conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B denota-se $A \times B$ e é o conjunto de pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$.

<u>Definição de correspondência entre dois conjuntos:</u> Uma relação (ou correspondência) de A para B é um subconjunto de $A \times B$.

<u>Definição de domínio e contradomínio de uma correspondência:</u> O domínio de uma relação g, de A para B, é o conjunto dos objetos $x \in A$ para os quais existe pelo menos um $y \in B$ tal que $(x, y) \in g$ (escreve-se D_g). De forma análoga, o contradomínio de g é o conjunto dos $y \in B$ para os quais existe pelo menos um $x \in A$ tal que $(x, y) \in g$ (escreve-se D'_g).

Definição de correspondência inversa: Sendo g uma relação de A para B, chama-se relação (ou correspondência) inversa de g, e designa-se por g^{-1}, à relação de B para A definida da seguinte forma: $g^{-1} = \{(y,x) \in B \times A : (x,y) \in g\}$.

Proposição 1: Para qualquer relação g, de A para B, o domínio de g é o contradomínio de g^{-1} e vice-versa.

Demonstração: Seja $x \in D_g$. Então existe $y \in B$, tal que $(x,y) \in g$. Por definição de g^{-1}, $(y,x) \in g^{-1}$, logo $x \in D'_{g^{-1}}$.

Então $D_g \subset D'_{g^{-1}}$ (A outra inclusão é análoga).

Como a inversa de g^{-1} é claramente g, o domínio de g^{-1} é, também, o contradomínio de g.

Definição de função: Chamamos função definida em A e com valores em B, e escrevemos $f: A \longrightarrow B$, a uma relação f de A para B tal que:

O domínio de f é o conjunto A e

$(x,y_1),(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Definição de imagem: Seja $f: A \longrightarrow B$ uma função. Para qualquer objeto $x \in A$, chamamos imagem de x por f e escrevemos $f(x)$ ao único $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.

Dada a definição de função apresentada, a igualdade de funções surge como uma proposição e não como definição, uma vez que duas funções serão iguais se estiverem contidas uma na outra.

Proposição 2: Duas funções f e g são iguais se e só se $D_f = D_g$ e $\forall x \in D_f$, $f(x) = g(x)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $D_f = D_g$ e $\forall x \in D_f,\ f(x) = g(x)$. Seja $(x,y) \in f$.

Sabemos que $x \in D_f$, logo $x \in D_g$ porque $D_f = D_g$.

Então, existe $y' \in D'_g$ tal que $(x,y') \in g$.

Temos que $y = f(x)$ e $y' = g(x)$, mas por hipótese $f(x) = g(x)$, logo $y' = y$.

Concluímos que $(x,y) \in g$, logo $f \subset g$. (A outra inclusão é análoga).

<u>Definição de restrição e prolongamento de uma função:</u> Seja $f: A \longrightarrow B$ uma função e $C \subset A$. Chamamos restrição de f a C e escrevemos $f|_C$ à função de domínio C e tal que $f|_C(x) = f(x), \forall x \in C$. Nas mesmas condições dizemos que f é um prolongamento de $f|_C$.

<u>Definição de função injetiva:</u> Uma função $f: A \longrightarrow B$ diz-se injetiva se

$$x_1, x_2 \in A \; e \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

A proposição seguinte, não foi demonstrada pelos alunos mas apenas a induziram intuitivamente usando alguns exemplos.

<u>Proposição 3:</u> Seja $f: A \longrightarrow B$ uma função e f^{-1} a correspondência inversa de f. Temos que f^{-1} é uma função (definida em D'_f e com valores em A) se e só se f é injetiva.

Demonstração: (⇒) Suponhamos que f^{-1} é uma função definida em D'_f e com valores em A. Então, $(y,x),(y,z) \in f^{-1} \Rightarrow x = z$ (1).

Sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então $\big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_1)\big) \in f$, donde, por definição de correspondência inversa $(f(x_1), x_1), (f(x_1), x_2) \in f^{-1}$.

Usando a hipótese (1), vem que $x_1 = x_2$.

Podemos então concluir que f é injetiva.

(⇐) Suponhamos que f é injetiva. Então,

$x_1, x_2 \in A \; e \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Pela definição de correspondência inversa, f^{-1} é uma relação de B para A e, pela proposição 1, o seu domínio é D'_f.

Sejam $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}$. Então $(x_1, y), (x_2, y) \in f$ e, como f é injetiva, vem que $x_1 = x_2$.

Logo f^{-1} é função.

<u>Definição de função invertível:</u> Seja $f: A \longrightarrow B$ uma função injetiva. Então f diz-se invertível e f^{-1} diz-se função inversa de f.

<u>Definição de função composta:</u> Sejam f e g funções. Chamamos função composta de f com g e escrevemos $f \circ g$, à função definida do seguinte modo:

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$ e $\forall x \in D_{f \circ g}, f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$.

Definição de funções permutáveis: Duas funções f e g dizem-se permutáveis se $f \circ g = \ g \circ f$.

As definições de função soma, diferença, quociente e produto, só fazem sentido para funções numéricas, por isso optei por restringir, no âmbito desta unidade de ensino, estas definições às funções reais de variável real.

Definição de função real de variável real: Chama-se função real de variável real a uma função cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de ℝ.

Definição de função identidade: Chama-se função identidade dos números reais à função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x$.

Proposição 4: Seja f uma função real de variável real invertível. A composta de f^{-1} com f é a função identidade restrita ao domínio de f.

Demonstração: Seja $x \in D_f$ e seja $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$.

Então $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big)$=$f^{-1}(y) = x$, por definição de f^{-1}.

Temos que $D_{\,f^{-1}\circ f} = \big\{x \in D_f\colon f(x) \in D_{\,f^{-1}}\big\}$, ou seja $D_{\,f^{-1}\circ f} = D_f$.

Proposição 5: Se f e g são funções reais de variável real permutáveis tais que $f \circ g$ é a função identidade restrita ao domínio de f, então f e g são funções inversas uma da outra.

Demonstração: Suponhamos que f e g são permutáveis e $f \circ g$ é a função identidade restrita ao domínio de f. Então, em particular, $D_{f\circ g} \ = D_f$.

Seja $x \in D_f$ e $y = f(x)$. Se $y \notin D_g$ então $x \notin D_{f\circ g}$ o que é absurdo porque $D_{f\circ g} \ = D_f$.

Temos então que $y \in D_g$ e, por hipótese, $g(y) = g\big(f(x)\big) = x$.

Isto mostra que $(x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in g$ (a outra implicação sai facilmente do facto de as funções serem permutáveis).

Definição de domínio máximo de definição de uma expressão algébrica: Chama-se domínio máximo de definição de uma expressão algébrica, ao conjunto de todos os números reais para os quais essa expressão faça sentido. Quando uma função é dada apenas pela sua expressão algébrica, considera-se que está definida no seu domínio máximo de definição.

<u>Definição de representação gráfica de uma função:</u> Considerando um plano onde foi fixado um referencial cartesiano ortogonal, chamamos representação gráfica de uma função real de variável real f, ao conjunto de pontos do plano cujas coordenadas (x, y) são tais que $y = f(x)$.

<u>Proposição 6:</u> As representações gráficas de uma função e da sua inversa são simétricas relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Não apresento a demonstração da proposição 6 porque sai do âmbito desta unidade didática.

<u>Definição de função soma:</u> Sejam f e g duas funções reais de variável real. Chamamos função soma de f com g e representamos por $f + g$, à função definida da seguinte forma: $D_{f+g} = D_f \cap D_g$e $\forall x \in D_{f+g}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

<u>Definição de função diferença:</u> Sejam f e g duas funções reais de variável real. Chamamos função diferença entre f e g e representamos por $f - g$, à função definida da seguinte forma: $D_{f-g} = D_f \cap D_g$e $\forall x \in D_{f-g}, (f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

<u>Definição de função produto:</u> Sejam f e g duas funções reais de variável real. Chamamos função produto de f por g e representamos por $f \times g$, à função definida da seguinte forma: $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$e $\forall x \in D_{f\times g}, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.

<u>Definição de função quociente:</u> Sejam f e g duas funções reais de variável real. Chamamos função quociente de f por g e representamos por $\frac{f}{g}$, à função definida da seguinte forma: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \backslash \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$ e $\forall x \in D_{\frac{f}{g}}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Os alunos já tinham tido contacto com as definições seguintes em anos anteriores, mas não tinham trabalhado com as definições algébricas e sim com a interpretação gráfica das mesmas.

<u>Definição de função par:</u> Uma função f real de variável real diz-se par se para qualquer $x \in D_f$ se tem que $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.

Proposição 7: A representação gráfica de uma função par é simétrica relativamente ao eixo Oy.

Definição de função ímpar: Uma função f real de variável real diz-se ímpar se para qualquer $x \in D_f$ se tem que $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.

Proposição 8: A representação gráfica de uma função ímpar é simétrica relativamente à origem do referencial.

Não apresento as demonstrações das proposições 7 e 8 porque saem do âmbito desta unidade didática.

Definição de função estritamente crescente: Seja f uma função real de variável real e $A \subset D_f$.

Se $x_1, x_2 \in A\ e\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, então f diz-se estritamente crescente em A.

Definição de função crescente em sentido lato: Seja f uma função real de variável real e $A \subset D_f$.

Se $x_1, x_2 \in A\ e\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, então f diz-se crescente em sentido lato em A.

Definição de função estritamente decrescente: Seja f uma função real de variável real e $A \subset D_f$.

Se $x_1, x_2 \in A\ e\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, então f diz-se estritamente decrescente em A.

Definição de função decrescente em sentido lato: Seja f uma função real de variável real e $A \subset D_f$.

Se $x_1, x_2 \in A\ e\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, então f diz-se decrescente em sentido lato em A.

Definição de função monótona: Uma função f real de variável real é monótona crescente/decrescente se for respetivamente crescente/decrescente em todo o seu domínio.

Seguem-se as definições sobre radicais e funções com radicais abordadas durante a unidade de ensino.

<u>Definição de raiz índice n de um número real:</u> Chamamos raiz índice $n \in \mathbb{N}$ de um número real x (e escrevemos $\sqrt[n]{x}$) a um número real y tal que $y^n = x$ (caso exista).

<u>Proposição 9:</u> Se $n \in \mathbb{N}$ é par e $x \in \mathbb{R}^-$, não existe $\sqrt[n]{x}$.

Demonstração: Suponhamos que existe um número real y tal que $y = \sqrt[n]{x}$. Então $y^n = x$, o que é absurdo porque, como n é par $y^n \geq 0$.

<u>Definição de potência de expoente racional:</u> Definimos potência de expoente racional da seguinte forma:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}.$$

Se m é ímpar e $n > 0$ a definição é válida para $a \in \mathbb{R}$.

Se m é ímpar e $n \leq 0$ a definição é válida para $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Se m é par e $n > 0$ a definição é válida para $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Se m é par e $n \leq 0$ a definição é válida para $a \in \mathbb{R}^+$.

<u>Definição de função com radicais:</u> Uma função com radicais (ou irracional) é uma função em que a variável faz parte do radicando de uma raiz de índice n $(n \geq 2)$.

Se n for ímpar, o radicando pode ser qualquer número real.

Se n for par, o radicando tem de ser maior ou igual a zero.

3.3 Estratégias de ensino

As orientações metodológicas do Programa de Matemática A sugerem a introdução dos conceitos e propriedades básicas das funções de forma intuitiva, levando os alunos a trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas (Silva et al. 2001), que são consonantes com um método de ensino exploratório que envolve os alunos numa atividade próxima da atividade do matemático (Tudella et al., 1999). Ponte (2005) defende que “existem versões extremas de ensino direto e de ensino-aprendizagem exploratório, tal como existem muitas versões intermédias” (p.

23), pois num processo de ensino exploratório pode haver momentos em que é adequado haver momentos de exposição por parte do professor.

Os alunos nem sempre têm ferramentas matemáticas para encontrarem uma justificação para uma conjetura ou mesmo um contraexemplo que a refute (NCTM, 2000), por isso, por vezes uma investigação ou uma prova podem ser mais dirigidas pelo professor, pedindo a colaboração de toda a turma e levando os alunos a compreender cada passo do processo (Freitas, 2011; Tudella et al., 1999). Pode ainda ser interessante fazer discussões em grande grupo, no início da aula, com caráter problematizador e que motivem os alunos, passando depois ao trabalho autónomo em pequenos grupos (Tudella et al., 1999). Na verdade, o que distingue o ensino exploratório é a tendência geral do trabalho desenvolvido e a natureza das tarefas propostas e não uma ou outra intervenção mais guiada pelo professor (Ponte, 2005).

Neste tipo de ensino, são aplicadas tarefas de natureza problemática, que fazem emergir a necessidade de raciocinar matematicamente e a entreajuda dos alunos que aprendem partilhando estratégias e conclusões em discussões que envolvem toda a turma e acima de tudo refletindo sobre o trabalho realizado (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008). Além disso, as explorações e investigações levam a conjeturas que estimulam a necessidade de prova por parte dos alunos (Harel & Sowder, 2007). Ao longo da minha intervenção, selecionei as tarefas com base nos objetivos de aprendizagem do tema das Funções que estabeleci para cada aula mas, ao mesmo tempo, tentei que a maioria dessas tarefas tivesse uma componente de argumentação matemática e tentei salientar estratégias, raciocínios e pormenores de formalismo que ajudassem os alunos a aprimorar o rigor da sua argumentação de modo a fazerem a transição entre a justificação e a prova e, possivelmente a demonstração (Balacheff, 2000), mas sem ‘forçar’ os alunos a optarem por uma determinada forma de argumentação.

As orientações do Programa, determinam que aprendizagens significativas têm de incluir características típicas do ensino experimental (Silva et al., 2001) e na investigação em Matemática, passa-se por processos de particularização, descoberta de regularidades, formulação de conjeturas, teste e prova das mesmas (Freitas, 2011; Mason et al., 1982). Assim ao longo das subunidades, tentei proporcionar aos alunos oportunidades para desenvolverem cada um destes processos matemáticos, permitindo-lhes, assim, construir o seu próprio conhecimento ao serem os mesmos a tirar conclusões, produzir meios de prova e escrever as sínteses das conclusões tiradas.

A realização de cada uma das tarefas propostas aos alunos, ao longo da unidade de ensino, contemplou três momentos distintos: (a) apresentação da tarefa; (b) trabalho autónomo dos alunos; (c) discussão e síntese (Tudella et al., 1999; Canavarro, 2011; Stein et al., 2005). Na apresentação da tarefa (oralmente ou por escrito), o professor propõe a tarefa aos alunos e negoceia com estes o tempo para a resolverem, os recursos que podem utilizar e o que se espera que produzam (Stein et al, 2008). Em algumas tarefas, pode também ser estimulante, nesta fase, pedir aos alunos que façam previsões sobre o resultado que esperam obter. Isto serve, não só de motivação, mas também estimula a verificação e a argumentação como forma de comprovar as intuições (Canavarro, 2011). Dependendo da complexidade do enunciado, optei por discuti-lo com os alunos ou pedir-lhes apenas para ler em silêncio e começarem a resolver pois, segundo Tudella et al. (1999) e Goldenberg (1999), se o enunciado for claro e os alunos estiverem já habituados a este tipo de trabalho, pode desenvolver-se assim a autonomia dos mesmos.

O trabalho autónomo dos alunos foi realizado maioritariamente a pares (e um grupo de três, porque a turma é em número ímpar), criando assim oportunidades de argumentação e troca de ideias e porque este era o modo habitual de trabalhar desta turma (Canavarro, 2011; Harel & Sowder, 2007). Os pares estão já formados desde o início do ano letivo e foram os próprios alunos a decidir onde se sentavam e com quem. Não houve necessidade de os alterar porque os pares trabalham bem e entreajudam-se, sendo menor o receio de formular conjeturas do que numa situação em que os elementos do par não se apoiam mutuamente ou desconsideram as ideias do colega (Tudella et al., 1999).

O meu objetivo é estimular a interação entre colegas e com o professor por forma a desenvolver o raciocínio e a comunicação matemática (Silva et al., 2001). Ao formularem conjeturas e ao questionarem e compararem estratégias e processos com o colega de grupo, os alunos alcançam uma maior compreensão dos conceitos e processos matemáticos mobilizados na resolução da tarefa (Tudella et al., 1999). Na tabela seguinte (Tabela 8) apresento um resumo das principais ideias relativas às práticas do professor durante uma aula exploratória, baseada nos artigos de Canavarro (2011) e Stein et al. (2008).

Tabela 8 - Práticas para Orquestrar Discussões Matemáticas

Práticas do Professor	Quando?	O que fazer?
1. Antecipar	Durante a planificação da aula	• Prever a abordagem que os alunos farão da tarefa • Resolver a tarefa das mais variadas formas possível • Prever estratégias e dificuldades
1. Monitorizar	Durante o trabalho autónomo dos alunos	• Verificar se os alunos estão a trabalhar na tarefa • Apropriar-se das estratégias e resoluções dos alunos • Avaliar o seu potencial para a aprendizagem e a sua validade matemática • Ajudar alunos em dificuldade • Preencher tabela de observação
2. Selecionar	Nos últimos minutos do trabalho autónomo	• Identificar erros a explorar na discussão • Selecionar grupos cujo trabalho deve ser apresentado, de forma a contribuir para o propósito matemático da aula • Não selecionar sempre os mesmos alunos, nem só aqueles que se voluntariam
3. Sequenciar	Nos últimos minutos do trabalho autónomo	• Definir um percurso de exploração das ideias matemáticas • Escolher a ordem de apresentação dos grupos selecionados, de forma a maximizar as hipóteses de atingir o propósito matemático da aula • Partir de resoluções mais afastadas desse propósito e caminhar para as mais próximas
4. Estabelecer Conexões	Durante a discussão em grande-grupo	• Encontrar diferenças e semelhanças nas resoluções apresentadas • Comparar a eficácia de estratégias e representações • Sintetizar o processo realizado destacando as conjeturas, a refutação ou confirmação das mesmas e a sua justificação matemática e eventual demonstração

Durante o trabalho autónomo dos alunos, circulei pelos grupos para monitorizar (Tabela 8) o progresso e as estratégias adotadas por cada par de alunos. Quando os grupos estavam bloqueados nalguma questão, incentivei-os a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos e os que terminaram mais cedo a explorarem outras formas de raciocínio ou a aprimorarem o rigor das suas respostas (Canavarro, 2011). Ao longo do trabalho dos alunos, também esclareci algumas questões em cada grupo e, quando a mesma era evidenciada por vários grupos, interrompi o trabalho autónomo e devolvi a questão à turma para que fossem os próprios alunos a esclarecê-la e para que pudessem todos continuar a tarefa (Tudella et al., 1999). É importante ir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento e para que o professor perceba as estratégias e as ideias matemáticas que estão a ser mobilizadas. No entanto, tentei não validar nem contrariar o seu trabalho, incentivando-os a seguirem o caminho que lhes fizesse mais sentido (Stein et al., 2008), para que não assumam que o professor é que determina o certo e o errado, desresponsabilizando-os da sua aprendizagem (Tudella et al., 1999).

O questionamento que promova o pensamento e reflexão dos alunos é, assim, a melhor aposta para a maioria das interações professor-aluno durante o desenvolvimento da tarefa. Questões como: 'o que te leva a pensar isso?', 'qual a relação entre essas ideias?' ou 'porque não concordas com o teu colega?', podem ser usadas como estímulo ao confronto de opiniões, incentivando o sentido crítico e a argumentação (NCTM, 2000; Tudella et al., 1999). Além disso o professor pode incentivar os alunos a aprofundar uma ideia com sugestões do género: "Experimenta para ver o que dá"; " Será que é sempre assim?"; "Não sei. Nunca experimentei dessa forma. Tens de averiguar" (Tudella et al., 1999, p. 91). Estas questões podem também estimular a necessidade de construir provas matemáticas, uma vez que os alunos do Ensino Secundário já compreenderão que um ou dois casos particulares não servem para garantir o resultado no caso geral (Harel & Sowder, 2007).

Ao longo do trabalho autónomo dos alunos, vai-se formando um conjunto de estratégias, respostas e conclusões que o professor deve gerir de forma a promover uma compreensão mais profunda dos conceitos e processos matemáticos que quer pôr em destaque nessa aula (Stein et al., 2008). É necessário então selecionar e sequenciar (Tabela 8) as resoluções que serão apresentadas à turma e discutidas em grande grupo. Canavarro (2011) sugere que podem selecionar-se resoluções com representações matemáticas diversas ou com diferentes estratégias e sequenciá-las com nível progressivo de eficácia. Podem também sequenciar-se as resoluções por nível de formalização, partindo de uma resolução mais acessível a todos os alunos (independentemente de estar correta) e caminhando para um grau de formalização superior.

Ponte (2005) defende que os alunos aprendem essencialmente com a reflexão que fazem sobre o trabalho que realizam. Esta reflexão permite que se valorizem os processos e não os resultados (Goldenberg, 1999), ou seja, a forma como pensamos e as razões porque o fazemos são mais importantes que chegar ou não ao resultado esperado (Tudella et al., 1999). Por isso, dei um grande destaque aos momentos de discussão em grupo-turma sobre a atividade matemática realizada, nos quais se apresentam à turma algumas das resoluções para serem analisadas e discutidas por todos (Steinet al., 2008). Neste momento da aula, os alunos aprendem com as estratégias dos outros pares e reforçam a sua capacidade de raciocínio aprendendo a questionar, comparar e argumentar a favor ou contra uma certa ideia (NCTM, 2000; Silva et al., 2001). É necessário desenvolver, nos alunos, a convicção e autonomia necessárias para produzir provas matemáticas. Se o professor esperar pouco tempo antes de dar, ele próprio, as respostas, ou se repete a pergunta, ignorando respostas incompletas ou erradas, até obter aquela que esperava ouvir, está a incutir nos alunos a ideia de que só as ideias validadas pelo professor é que são importantes ou interessantes (Santos, 2008).

Durante a discussão coletiva devem ainda clarificar-se conceitos e procedimentos, discutindo os erros mais comuns e estabelecendo conexões (Tabela 8) dentro e fora da Matemática (Ponte, 2005; Tudella et al., 1999). O erro deve ser considerado como uma oportunidade de aprendizagem e de esclarecimento de ideias erróneas (Santos, 2005; NCTM, 2000). Utilizei estes momentos para formular com os alunos sínteses dos processos e conceitos que tenham emergido da tarefa, que serão registadas por estes para posterior consulta. É necessário trabalhar com os alunos no sentido de os habituar a não falarem ao mesmo tempo e aprenderem a ouvir os argumentos dos colegas e colocarem questões uns aos outros (Tudella et al., 1999). Tentei estimular também o sentido crítico e levar os alunos a encarar as afirmações dos colegas, do professor e até do manual, como proposições ainda não validadas e que têm sempre de ser provadas (Mason et al., 1982).

Nestas discussões em grande grupo, os alunos tiveram oportunidades para testar as suas ideias confrontando-as com as dos outros e para aperfeiçoar a sua argumentação de forma a tornarem-se suficientemente convincentes para que a turma aceite a sua conjetura como verdadeira (NCTM, 2000). Além disso, a comparação de resultados e conclusões, promove uma crescente apreciação pela prova como argumento irrefutável numa discussão matemática e estimula o raciocínio dedutivo dos alunos (Quin, 2009). As discussões em grupo-turma geram progressos na argumentação e capacidade de construir provas e demonstrações e o professor deve ser um facilitador deste processo (Harel & Sowder, 2007).

3.4 Tarefas e recursos

As tarefas selecionadas pelo professor devem “contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação” (Silva et al., 2001, p. 10). Tendo em conta estas recomendações programáticas, nas aulas lecionadas por mim, procurei propor tarefas de investigação e exploração, por serem as tarefas mais comuns em aulas de ensino exploratório (Ponte, 2005), além de exercícios de aplicação e problemas para consolidação de conhecimentos. A seleção de tarefas teve em conta o contexto da turma, de modo a que o seu objetivo pudesse ser compreendido por todos os alunos, indo também ao encontro dos seus interesses (Tudella et al., 1999; Ponte, 2005). Se uma tarefa for demasiado difícil para um grupo de alunos, pode fazer com que estes desistam rapidamente, mas se for demasiado acessível não contribui de forma significativa para a aprendizagem (Ponte, 2005).

Uma tarefa é considerada um problema se o aluno não dispuser de um processo imediato para o resolver, independentemente do seu contexto ser real ou puramente matemático (Ponte, 2005). Goldenberg (1999) refere que “na vida real, os problemas não surgem precisamente depois de termos acabado de estudar um capítulo sobre o modo de os resolver ou acabado de ler um exemplo prático” (p.37), por isso selecionei problemas que mobilizassem conhecimentos de vários temas matemáticos. Caso o aluno saiba exatamente o que fazer para chegar à solução (independentemente da dificuldade desse processo) estamos perante um exercício que servirá essencialmente para consolidação de conhecimentos já adquiridos (Ponte, 2005). Os problemas e os exercícios têm em comum o facto de serem tarefas fechadas (Figura 4) que, portanto contribuem para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, uma vez que há uma relação lógica direta entre os dados e os resultados (Ponte, 2005) por isso também os propus aos alunos, quer em aula, quer como trabalho para casa.

Figura 4. Relação entre os diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005)

As tarefas de caráter mais aberto, como as explorações e as investigações, permitem aos alunos seguir por caminhos imprevisíveis (Tudella et al., 1999). A principal diferença entre estes tipos de tarefa é o seu grau de desafio (Figura 4) e Ponte (2005) defende que as tarefas abertas são de extrema importância porque desenvolvem a autonomia e a capacidade de lidar com situações complexas, uma vez que os alunos estão envolvidos ativamente desde a fase de formulação de questões, e que, nas investigações formuladas em contextos puramente matemáticos, os alunos experimentam a atividade desenvolvida pelos investigadores matemáticos. Há ainda que considerar a duração das tarefas a propor. Segundo o autor, uma tarefa mais aberta precisará naturalmente de mais tempo para ser convenientemente explorada e gerar aprendizagens mais profundas mas há que ter em conta o risco de os alunos se dispersarem do objetivo inicial. É, então, recomendável que numa primeira fase as tarefas propostas sejam mais estruturadas para facilitar a habituação aos processos investigativos e sejam progressivamente mais abertas à medida que os alunos ganhem familiaridade com este tipo de trabalho (Tudella et al., 1999).

As orientações curriculares atribuem ao professor a responsabilidade de definir a quantidade de tarefas de investigação e exploração, problemas e exercícios a propor aos alunos dentro e fora da sala de aula (Silva et al., 2001). Segundo Quin (2009) é essencial implementar tarefas que introduzam a prova como uma necessidade para os alunos. Selecionei tarefas que permitissem estudar as funções nas suas várias representações, nomeadamente a expressão analítica e a representação gráfica (Silva et al., 2001), porque para compreender uma função é essencial trabalhar as suas diferentes representações e inter-relacioná-las, sabendo argumentar tanto analiticamente, como graficamente (Leinhardt et al., 1990).

Procurei igualmente propor tarefas com um caráter desafiante, e que apelassem à argumentação, porque uma parte das dificuldades dos alunos em produzir provas matemáticas pode vir da falta de tarefas que provoquem essa necessidade (Harel & Sowder, 2007). Estas tarefas têm também como objetivo motivar os alunos, exercendo o papel de um jogo em que há regras determinadas e um resultado a atingir (Freitas, 2011; Goldenberg, 1999). Além disso, este tipo de tarefas desencadeia o desejo de certeza por parte dos alunos, o que os leva a desenvolver a sua argumentação matemática como forma de justificar cada passo da sua resolução (Balacheff, 2000), desenvolvendo, simultaneamente, o raciocínio dedutivo. As tarefas dirigidas à argumentação podem ser investigações, explorações, problemas ou exercícios. O que as distingue de outras tarefas é a necessidade explícita de uma justificação.

Goldenberg (1999) afirma que, a par de conceitos como retas, funções ou polinómios e de resultados como o Teorema Pitágoras ou a fórmula resolvente, a Matemática também desenvolveu modos de raciocínio que são extremamente valiosos e podem ser transpostos para outros domínios do quotidiano e que não estaríamos a dar aos alunos uma experiência verdadeiramente matemática se não os deixarmos experimentar estas formas de raciocínio. Procurei incentivar as atitudes questionadoras com formulação de conjeturas e procura de justificações para as mesmas, estimulando a argumentação nas interações entre alunos e aluno-professor, criando um ambiente em que a criatividade e as ideias próprias são valorizadas (Tudella et al., 1999).

As tarefas de investigação podem surgir formuladas pelo professor, ou sugeridas pelas ideias dos alunos e podem surgir novas questões à medida que o trabalho vai decorrendo (Ponte, 2005). Goldenberg (1999) descreve três tipos principais de tarefas de natureza investigativa: (a) tarefas para explorar, em que o objetivo é levar os alunos a desenvolver intuições matemáticas e a experimentar vários caminhos; (b) tarefas para descobrir, em que o objetivo é que os alunos cheguem à definição de um conceito ou a um resultado importante; e (c) tarefas de 'pôr em questão', em que se muda a situação, o contexto ou o domínio que estamos a considerar. O meu objetivo, ao selecionar as tarefas, foi ajudar os alunos a refinar e aprimorar a sua argumentação produzindo provas cada vez mais formais (Harel & Sowder, 2007) a par da aprendizagem dos conceitos e procedimentos do tema das funções.

Quanto aos recursos utilizados em sala de aula, foram tidas em conta as sugestões do Programa de Matemática A (Silva et al., 2001), nomeadamente:

• Manual adotado pela escola;

• Meios audiovisuais (retroprojetor, acetatos e *datashow*);

• Outros materiais escritos (por exemplo fichas de trabalho);

• Calculadora gráfica.

A calculadora gráfica foi utilizada, acima de tudo, como apoio para o estudo de características gráficas das funções e argumentação gráfica (Magalhães & Martinho, 2011) e o retroprojetor e *datashow* só foram usados pontualmente. Em todas as aulas, usei sempre que possível, tarefas do manual adotado (Costa & Rodrigues, 2011), especialmente para consolidação de conhecimentos e como trabalho para casa, pois sou da opinião que é um recurso que os alunos foram obrigados a adquirir e que foi escolhido pelos professores da escola, por isso deve ser usado, pelo professor ao selecionar as tarefas para a aula e pelos alunos como ferramenta de estudo. Claro que nenhum manual é ideal e, por isso, quando as tarefas propostas no mesmo não iam de encontro aos meus objetivos para a aula, criei tarefas ou adaptei-as de outras fontes.

Tarefa "Igualdade de funções"

A tarefa "Igualdade de Funções" (Anexo B) foi apresentada aos alunos numa ficha de trabalho e tem por objetivo introduzir a definição de igualdade de duas funções. Esta é uma tarefa de contexto puramente matemático que pode ser classificada como de investigação porque é aberta e tem um certo grau de desafio. Na classificação de Goldenberg (1999) esta é uma tarefa de 'pôr em questão' uma vez que os alunos são levados a questionar "afinal o que é uma igualdade entre objetos matemáticos?" e a perceber que a definição não é sempre a mesma e depende da natureza dos objetos. Ao resolver esta tarefa, os alunos são incitados a usar o raciocínio indutivo, ao estabelecerem conjeturas a partir de casos particulares e o raciocínio dedutivo ao provarem ou refutarem essas conjeturas.

Na questão 1, escolhi três objetos para provocar a ideia de que as funções devem ser iguais. Os alunos já encontraram muitas funções que se intersetam em um ou dois pontos, mas terem três pontos em comum já não é usual. Escolhi valores positivos, inteiros e todos ímpares para verificar se os alunos que responderem que as funções são iguais, baseados em casos particulares, sentem a necessidade de experimentar para números pares ou negativos ou não inteiros. O objetivo da questão 3 é reforçar a ideia da diferença dos domínios, uma vez que -1 tem imagem pela função f e não tem imagem pela função g. Adicionei a questão 5 para discutir com os alunos a ideia de que a calculadora gráfica nem sempre nos dá uma representação rigorosa do gráfico de uma função, uma vez que, neste caso, apresenta gráficos iguais e não assinala a interrupção do domínio da função g no ponto de abcissa -1.

Tarefa 26 da página 98 do manual

O objetivo da tarefa 26 da página 98 do manual (Anexo B) é introduzir a noção de função soma. Esta é uma tarefa de exploração porque é também aberta mas tem um menor nível de desafio, uma vez que somar expressões é um processo ao qual os alunos já estão habituados e só o contexto em que o fazem é que é novo. A tarefa tem contexto real, permitindo desenvolver a capacidade de interpretação dos alunos porque têm de traduzir a informação contextualizada para linguagem matemática e vice-versa. O enunciado é simples e coerente, o que favorece a autonomia dos alunos, porque assim podem realizar a tarefa sem ser necessária orientação por parte do professor. Tentei sempre escolher enunciados que fossem fáceis de compreender e minimizar a apresentação das tarefas, porque esta é, de acordo com as minhas observações e com a opinião dos professores da turma, uma das capacidades que estes alunos mais precisam de desenvolver.

Tarefa "Estudar a paridade"

O objetivo da ficha de trabalho "Estudar a Paridade" (Anexo B) é recordar as definições analíticas de função par e ímpar e estudar a paridade das funções soma, diferença e produto. Criei a ficha de trabalho em três versões diferentes para que pares diferentes pudessem estudar a paridade de funções diferentes e assim otimizar a discussão em grupo-turma. As versões diferiam na operação que deveria ser estudada em cada caso, por exemplo a questão 1 era sobre a função soma na versão A, a função diferença na versão B e a função produto na versão C. Esta diferença de versões, permite-me perceber se os alunos, por um lado, sabem como abordar estes três tipos de questão ('mostra que…', 'verifica se…' e 'investiga') e identificam as suas diferenças e, por outro lado, se as dificuldades encontradas se prendem só com o tipo de questão ou também com a operação a estudar. A questão 4 era igual nas três versões porque eu pretendia verificar se os alunos repetiam a investigação feita anteriormente ou concluíam as propriedades da função quociente, baseados nas da função produto.

Esta é uma tarefa de investigação, uma vez que tem um grau de desafio bastante elevado e os alunos estão a descobrir (Goldenberg, 1999) e demonstrar novas propriedades, ou seja, a criar novos conhecimentos matemáticos. Optei por organizar as questões da mais fechada para a mais aberta porque achei que seria mais fácil para os alunos abordar as questões desta forma. Na questão 1, os alunos têm definidas a hipótese e a tese e têm apenas que provar o que é pedido; na questão 2 apenas estão definidas as hipóteses e os alunos é que têm de tirar conclusões; na questão 3 os alunos é que têm de colocar hipóteses e testar cada caso, tirando conclusões para o caso geral e na questão 4 são convidados a fazer conjeturas sobre a paridade da função quociente. Era meu objetivo, com esta tarefa, trabalhar o raciocínio dedutivo e a argumentação e também incitar à formulação de conjeturas, especialmente na questão 4.

Tarefa "Composição de funções"

Ao procurar tarefas para introduzir a função composta, encontrei, por um lado tarefas de contexto puramente matemático que, no meu ver, não permitem compreender a utilidade prática desta operação entre funções e, por outro lado, tarefas de contexto real com funções demasiado simples, que era menos moroso calcular mentalmente e em separado cada uma das funções do que pensar em compô-las. Encontrei também tarefas com problemas de domínio em que as resoluções previstas consideravam as funções como reais de variável real mas que no contexto apresentado deviam ter domínio $\mathbb{N}$. Tentei então criar uma tarefa ligada ao quotidiano dos alunos e que lhes parecesse estimulante, mas ao mesmo tempo que desse sentido e mostrasse a necessidade desta nova operação entre funções. Preocupei-me com a escolha dos domínios das funções para que não fossem triviais de modo a que os alunos dessem significado à expressão geral do domínio de uma função composta.

Surgiu assim a ficha de trabalho "Composição de Funções" (Anexo B) onde figura um problema de contexto real em que os alunos acabam por construir duas funções e a sua composta. Classifico esta tarefa como problema, porque tem questões nas quais não é único, nem imediato, o caminho a seguir para chegar à resposta e, assim, permite aos alunos desenvolver a capacidade de resolução de problemas, assim como a interpretação de enunciados e as questões são claras, de forma a desenvolver a autonomia dos alunos. A ficha tem questões mais fechadas (como a questão 1.a ou a 2.1.), questões de construção (como a 1.b ou a 3.3.) e questões de argumentação em que os alunos apenas têm de justificar a expressão já dada (como a 2.2). Propositadamente, não defini à partida se as questões deveriam ser resolvidas com auxílio da calculadora gráfica, ou não, para verificar se os alunos tomavam essa iniciativa ou se resolviam tudo analiticamente.

Tarefa "Algumas propriedades da composição de funções"

A tarefa "Algumas propriedades da composição de funções" (Anexo B) tem como principais objetivos: (a) cimentar os conhecimentos sobre composição de funções estudados anteriormente; (b) estudar a monotonia da função composta (questão 1), nos casos em que as funções iniciais são monótonas; (c) compreender a noção de permutabilidade de funções (questão 2) que serve de base para a posterior definição de função inversa, que foi o tema da subunidade seguinte (Tabela 8). Ao resolver a ficha, os alunos são levados a recordar conceitos como a monotonia de uma função (incluindo a definição analítica de função crescente e decrescente), relembram como caracterizar uma função e estudam a propriedade comutativa num contexto não numérico.

Esta tarefa, foi apresentada aos alunos numa ficha de trabalho e está dividida em duas questões com características bastante diferentes. A questão 1 foi adaptada do manual Matemática 11 da Porto Editora (Duarte, Filipe, Gouveia, & Fernandes, 2011) e é uma tarefa de investigação porque os alunos têm de definir hipóteses, estabelecer conjeturas e encontrar formas de as testar e comprovar ou refutar, estimulando, assim, o raciocínio indutivo e dedutivo. Esta tarefa é uma investigação para descobrir (Goldenberg, 1999), uma vez que os alunos estão a gerar novo conhecimento matemático. A questão 2 será melhor classificada como problema, uma vez que é mais fechada que a anterior mas tem um grau de desafio superior ao de um exercício, porque os alunos têm de justificar a existência ou não de propriedade comutativa numa operação que é nova para eles. Esta tarefa foi adaptada do manual Matemática onze da Lisboa Editora (Neves, Pereira, Guerreiro & Machado, 2011).

Tarefa 102 da página 108 do manual

A tarefa 102 da página 108 do manual adotado (Anexo B) foi escolhida para introduzir a ideia de correspondência inversa e, consequentemente, de função inversa. Esta tarefa é um exercício, porque é fechada e de nível fácil. Tem um contexto real, que permite aos alunos perceber a utilidade de procurar a correspondência inversa de uma função e verificar se essa correspondência é, também ela, uma função. Por estes motivos, é uma tarefa que motiva os alunos, o que proporciona uma boa discussão que levará à noção de função invertível e a um processo que permite encontrar a inversa de uma função (caso exista).

Tarefa "Uma investigação sobre funções inversas"

A ficha de trabalho "Uma investigação sobre funções inversas" (Anexo B) contém uma tarefa de investigação adaptada da Brochura de Funções do 11.º ano (Teixeira et al., 1998). O objetivo desta tarefa é compreender que os gráficos de duas funções, inversas uma da outra, são simétricos relativamente à reta $y = x$ e também consolidar os conhecimentos adquiridos na aula anterior sobre como encontrar a inversa de uma função invertível. Esta é uma tarefa de investigação porque é aberta e os alunos têm de estabelecer conjeturas e encontrar formas de as testar. Além disso tem um grau de desafio apreciável, uma vez que mistura raciocínios algébricos (questões 1 e 3) com raciocínios gráficos (questões 4 e 6). Podemos, ainda classificá-la como tarefa para explorar (Goldenberg, 1999) porque a sua resolução depende das intuições dos alunos e da sua capacidade para comparar e tirar conclusões sobre os gráficos.

Esta tarefa não faz, explicitamente, menção ao uso da calculadora gráfica porque os alunos tanto podem desenhar os gráficos pedidos e responder às questões colocadas com o auxílio da calculadora, como baseados no estudo das funções racionais que foi feito no início do 2.º período. Os alunos, ao resolver esta tarefa trabalham o raciocínio indutivo porque são levados a estabelecer uma conjetura sobre a relação entre os gráficos de quaisquer duas funções, inversas uma da outra. Além disso permite estabelecer conexões com conceitos e procedimentos estudados ao longo de todo o tema das funções, tanto este ano, como no ano anterior. Sendo, por isso, bastante apropriada para uma aula de final de subunidade que antecedeu um Teste Intermédio.

Tarefa 108 da página 113 do manual

A tarefa 108 da página 113 do manual (Anexo B) é um problema, uma vez que é relativamente fechada e tem um elevado grau de desafio, já que os alunos têm de provar uma proposição que é completamente nova para eles. Os objetivos desta tarefa são: consolidar os conhecimentos sobre função inversa e compreender a relação entre o declive da reta que representa o gráfico de uma função afim injetiva e da sua inversa. Esta relação é bastante importante e, desta forma são os alunos a demonstrá-la, estimulando a comunicação e argumentação matemática e o raciocínio dedutivo.

Tarefa 46 da página 148 do manual

Selecionei a tarefa 46 da página 148 do manual (Anexo B), com o objetivo de introduzir a definição de função com radicais e estudar algumas características destas funções (com ênfase no domínio). Esta tarefa é um problema, uma vez que é relativamente fechada e tem um grau de dificuldade elevado, porque os alunos nunca trabalharam com este tipo de funções. Têm assim hipótese de desenvolver a capacidade de resolução de problemas enquanto estabelecem conexões com o tema da Geometria e trabalham a comunicação matemática.

A questão 3.1, apela explicitamente ao uso da calculadora gráfica. Ao resolvê-la, os alunos vão obter um valor aproximado para o mínimo da função e a questão não indica sequer o grau de aproximação pretendido. Assim, a resposta que os alunos derem nunca será totalmente rigorosa se for apenas baseada na calculadora gráfica. O valor obtido, arredondado às centésimas é 7,07 mas, na realidade, este valor ainda não pertence ao domínio da função, uma vez que foi arredondado por defeito. No entanto, se o arredondarmos por excesso, estamos a apresentar um intervalo que não contém todos os objetos da função. Depois de refletir sobre estas questões, optei por deixar a questão como está, uma vez que, em situação de exame nacional há quase sempre questões para resolver com a calculadora gráfica onde os alunos têm de fazer arredondamento e indicar extremos, zeros e pontos de interseção de funções de uma forma apenas aproximada. Não quis confundi-los ao dizer-lhes que aquilo que têm de responder é, na verdade, falso do ponto de vista matemático.

Tarefa 122 da página 121 do manual

A tarefa 122 da página 121 do manual tem como objetivo compreender e consolidar a definição de potência de expoente fracionário. Esta tarefa é um problema, uma vez que é relativamente fechada e não é imediato o caminho a seguir para chegar à resposta. Os alunos, tanto podem começar por aplicar a função como mudar de notação entre o radical e a potência e é a primeira vez que fazem raciocínios deste género. Além disso permite estabelecer conexões entre as funções com radicais e as funções definidas por ramos, sendo que este tópico traz sempre algumas dificuldades para os alunos.

Tarefa 32 da página 125 do manual

O objetivo da tarefa 32 da página 125 do manual é rever a diferença entre equivalência e implicação, já mencionada no ano letivo anterior e este ano, no capítulo da Geometria, a propósito das propriedades do produto escalar (numa aula lecionada por mim) e aprender a resolver equações com radicais e confirmar as soluções por experimentação. Esta tarefa é uma tarefa de exploração, uma vez que o seu nível de dificuldade é relativamente baixo e é aberta. A questão 1 apela claramente ao raciocínio dedutivo e leva os alunos a diferenciar a implicação da equivalência. Já a questão 2 é de contexto real, permitindo desenvolver a capacidade de interpretação do enunciado, assim como a interpretação gráfica, uma vez que há questões que pedem explicitamente para fazer uso da calculadora gráfica. Na questão 2.2.4, os alunos deparam-se com uma equação com radicais já resolvida onde têm de preencher os espaços e, no final, vão confirmar as soluções por experimentação, aprendendo assim uma estratégia para resolver equações com radicais.

Tarefa 124 da página 123 do manual

A tarefa 124 da página 123 do manual adotado permite aos alunos consolidar a noção de função com radicais e estudar as funções com radicais como inversas das funções potência. Esta tarefa é um exercício pois é fechada e, apesar do grau de dificuldade ser elevado, os alunos conhecem o caminho a seguir para chegar à solução. Ao relacionar as funções com radicais com a função inversa e com as funções potência, os alunos estabelecem conexões e entendem melhor a Matemática como um todo. Esta tarefa estimula o raciocínio dedutivo e a argumentação matemática, uma vez que os alunos têm de produzir provas por exibição, ou seja, explicitar os cálculos que tornam a igualdade apresentada verdadeira.

Tarefa "As equações irracionais e a elipse"

A tarefa "As equações irracionais e a elipse" proposta no relatório escrito individual (anexo C) foi adaptada do manual Matemática A onze da Porto Editora (Neves et al., 2011) mas a principal razão para a escolher foi a indicação constante do Programa Nacional de Matemática A de 11.º ano (Silva et al., 2001) que sugere "uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos)" (p. 7). Os objetivos essenciais da tarefa são consolidar os conhecimentos sobre equações com radicais e aplicar as equações com radicais à dedução da equação reduzida de uma elipse centrada na origem do referencial. Ao mesmo tempo, os alunos aprendem o que é uma elipse e desenvolvem o raciocínio dedutivo e a argumentação matemática, enquanto estabelecem conexões entre as equações com radicais e a geometria.

Esta tarefa é um problema com nível de dificuldade acima da média, uma vez que os alunos têm de analisar uma demonstração já acabada e depois produzir uma nova demonstração, usando os mesmos raciocínios. Na formulação original da tarefa, a definição de elipse e o teorema apresentado misturavam-se no corpo do enunciado. Quis demarcar esta distinção, pois acho essencial que os alunos do Ensino Secundário percebam que a matemática se organiza em conjuntos de definições e axiomas, somados a todos os teoremas, proposições ou lemas que possam ser deduzidos destes (Silva et al., 2001). As questões de 1 a 6 permitem verificar a compreensão local e holística da demonstração dada (Meija- Ramos et al., 2012) e as apreciações inicial e final, permitem observar se os alunos sabem diferenciar os dados das hipóteses (Mason et al., 1982), se têm noção das suas dúvidas e das suas aprendizagens e da importância que atribuem a tarefas deste tipo e às demonstrações em particular (Harel & Sowder, 2007). Ao apresentar o relatório aos alunos, usei o *datashow* e um computador para projetar o enunciado no quadro, e dei aos alunos doze dias para o elaborar.

3.5 Avaliação das aprendizagens

Ao longo da minha intervenção letiva, recolhi dados com o objetivo de avaliar a minha prática e perceber as aprendizagens realizadas pelos alunos. A avaliação reguladora é "um processo de acompanhamento do ensino e aprendizagem" (Santos, 2008, p. 14) cujo objetivo é perceber e interpretar o modo de pensar dos alunos numa dada situação. Esta avaliação é integrada na prática e é realizada em paralelo com o trabalho desenvolvido com os alunos (NCTM, 2000; Menino & Santos, 2004). Usei como instrumentos de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos: (a) o questionamento oral na aula (NCTM, 2000), (b) a observação direta do trabalho autónomo dos alunos, (c) a recolha e análise dos trabalhos enviados para casa e (d) um relatório escrito individual.

O questionamento oral é uma das práticas mais usadas para avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos num dado momento de aula (Santos, 2008). Este instrumento é particularmente revelador porque acontece ao mesmo tempo que as aprendizagens vão sendo geradas e, ao ser efetuado oralmente, permite uma maior adaptabilidade (ajustando o tipo de questões, a sua quantidade ou a sua natureza) e potencia a interação, não só entre professor e aluno mas também entre alunos, que podem colocar questões e debater ideias uns com os outros. Para isso é fundamental que se desenvolva um ambiente em que os alunos se sintam confortáveis para expor as suas ideias e também para apoiar ou refutar as ideias de outros (Santos, 2008), argumentando e defendendo o seu ponto de vista sem constrangimentos.

Desenvolver o pensamento matemático dos alunos requer tempo, e as práticas de questionamento em que não se dá tempo aos alunos para pensar impedem o desenvolvimento do raciocínio (Mason et al., 1982). Estes momentos de questionamento devem, assim, ser participados por todos os alunos e pelo professor, privilegiando novas estratégias (mesmo que inesperadas ou imprevistas), sem diferenciar os alunos que acertam daqueles que erram, mas antes, usando o erro como forma de perceber os processos não verbalizados de pensamento do aluno (Santos, 2008).

A observação direta precede e complementa o questionamento, permitindo notar e refletir sobre aspetos não-verbais da comunicação como um acenar aprovador, uma “cara de quem não percebeu” ou um olhar ausente de um aluno distraído. Santos (2005) afirma que a observação direta pode ajudar o professor a tomar decisões relativas à gestão da aula, como aumentar ou diminuir o tempo para o trabalho autónomo dos alunos numa dada tarefa, por exemplo. Este método é, no entanto, muito exigente, dado que o professor tem de observar e registar o comportamento dos alunos, ao mesmo tempo que está a ser solicitado para esclarecer dúvidas, a gerir o tempo e os momentos de aula e a conduzir discussões ou questionamentos.

Ao recolher os trabalhos propostos para casa, pude verificar as aprendizagens realizadas pelos alunos e detetar os erros e incompreensões mais comuns para depois poder discutir, numa aula posterior, estas tarefas, confrontando e esclarecendo com a ajuda dos colegas essas dificuldades. Identifiquei alguns casos de alunos que copiaram os trabalhos uns pelos outros mas foram pontuais e apenas chamei a atenção dos alunos para o facto de ser importante tentarem fazer os trabalhos sozinhos para poderem consolidar os seus conhecimentos e perceber onde têm dificuldades. Não me pareceu que os alunos tivessem nenhum tipo de ajuda externa para fazer os trabalhos de casa e, mesmo que tivessem, seria sempre bom para mim perceber a linha de pensamento e estratégias que poderiam estar a ser influenciados a seguir. Devolvi sempre os trabalhos aos alunos comentados por mim. Usei o 'sinal' que universalmente ignifica 'correto', apenas em questões sem erros e completas. À parte disso o meu feedback foi sempre escrito e sempre em formato de pergunta ou sugestão, para desenvolver a autonomia e autorregulação dos alunos (Santos, 2008).

O relatório escrito é recomendado por diversos documentos curriculares (Teixeira et al., 1998; Silva et al., 2001; NCTM, 2000), uma vez que reforça a comunicação matemática dos alunos na sua vertente escrita (Santos, 2005). É também um fator de aprendizagem, no qual o aluno desenvolve processos de clarificação do seu pensamento para que o possa explicar por escrito e, além disso, tem de criticar o seu progresso, avaliar as suas dificuldades e perceber a qualidade do produto final. Este instrumento desenvolve, ainda, a autonomia dos alunos, fazendo com que se tornem mais independentes do professor (Menino & Santos, 2004).
Menino e Santos (2004) defendem que o relatório escrito permite desenvolver e avaliar "o espírito investigativo; a seleção e organização da informação; a comunicação; as competências associadas ao trabalho de grupo e competências sociais de carácter transversal; a integração, no relatório, das interações e dos feedbacks dos vários intervenientes do processo (professora e colegas); e a reflexão sobre a investigação realizada e as aprendizagens conseguidas" (p.5). Assim, o relatório permite-me obter informação válida sobre as aprendizagens efetuadas pelos alunos.

Santos (2005) afirma que o relatório escrito tem potencialidades quando elaborado dentro ou fora da sala de aula. Neste caso, apresentei aos alunos a tarefa "As equações irracionais e a elipse" para resolverem autonomamente em casa e um guião para elaboração do relatório que incluía, entre outros tópicos: a resolução da tarefa, a reflexão sobre as estratégias usadas e as dificuldades sentidas, a autoavaliação do trabalho desenvolvido e avaliação da tarefa quanto às aprendizagens realizadas. Procurei desenvolver, assim, a capacidade de reflexão e de autorregulação (Santos, 2008) dos alunos, que era uma das suas principais lacunas, segundo os professores do conselho de turma. Santos (2008) considera que a autorregulação tem duas fases: uma em que o aluno consegue comparar aquilo que fez com o que se pretendia que fizesse, verificando se estas duas realidades se sobrepõem e outra em que consegue fazer alguma coisa para reduzir a diferença entre elas.

O relatório escrito foi também usado como instrumento de avaliação sumativa, no sentido em que foi atribuída uma classificação final que teve um peso de 10% na média final do 2.º período dos alunos. Para tal, discuti com os alunos a tabela "Aspetos que vão ser tidos em conta na avaliação do teu relatório" (ver enunciado do relatório, anexo C) para que todos conhecessem e compreendessem a forma como iriam ser avaliados e com que objetivo (Santos, 2008). Elaborei também uma tabela de critérios de classificação (anexo C) para ser mais objetiva na cotação a atribuir em cada passo de uma questão.

3.6 Descrição da intervenção letiva

Nesta secção apresento uma síntese de cada uma das aulas lecionadas por mim, no sentido de explicitar as opções tomadas, ou seja, expor e justificar as estratégias usadas, os recursos utilizados, as tarefas propostas e a sequência adotada, evidenciando principalmente os aspetos que não ocorreram de acordo com as planificações (anexo A). Procuro explicar em que medida os objetivos específicos de cada aula foram atingidos e justifico as adaptações que ocorreram, devidas ao não cumprimento do previsto na planificação de alguma aula.

17 de Fevereiro de 2014

A primeira aula da minha intervenção letiva foi no dia 17 de Fevereiro, com a duração de 100 minutos. Tinha como objetivos para esta aula: (a) recordar que uma função é caracterizada pela sua lei de formação e pelo seu domínio; (b) levar os alunos a definir igualdade de funções; (c) a compreender as noções de função soma, diferença, produto e quociente e (d) discutir, com a turma, os respetivos domínios máximos de definição. Para tal, selecionei duas tarefas: uma criada por mim e apresentada numa ficha de trabalho e outra do manual adotado (Costa & Rodrigues, 2011) que foram ambas realizadas a pares.

A primeira parte da aula, focou-se na resolução da ficha de trabalho "Igualdade de Funções". Os alunos envolveram-se bastante na tarefa proposta e a resolução correu de acordo com o previsto, tanto em termos de estratégias e dificuldades verificadas, como em termos do tempo necessário para a resolução da ficha. Ao monitorizar o trabalho autónomo dos alunos apercebi-me de alguns aspetos que achei pertinente discutir e que não estavam previstos na planificação: (1) na questão 1 discutiu-se a estratégia de um par que, antes de tirar conclusões, experimentou calcular as imagens de outros valores para além dos dados (nomeadamente valores pares e negativos) como forma de fortalecer a sua conjetura, ao contrário do resto da turma que apenas calculou as imagens dos objetos dados; (2) foi discutida a noção de domínio máximo de definição de uma função, que havia gerado algumas dúvidas durante a resolução a vários alunos; (3) foram discutidos com os alunos certos erros de cálculo, quer feitos no quadro, quer identificados por mim quando circulava pelos pares; (4) foram relembrados conceitos e procedimentos aprendidos anteriormente; e (5) foram discutidas algumas limitações da calculadora gráfica, nomeadamente no que diz respeito aos gráficos da questão 5.

Na segunda parte da aula, os alunos resolveram tarefas do manual, cujo foco era as operações com funções. Ao resolverem a tarefa 26 do manual, chegaram ao conceito de função soma com facilidade tendo havido mais dúvidas na interpretação do gráfico do que em encontrar a expressão da função soma. Alguns pares terminaram antes dos restantes alunos e iniciaram a resolução de uma das tarefas previstas para fazer em casa (tarefa 82 da pág. 97). A discussão da tarefa 26 correu como previsto na planificação, não havendo situações a assinalar. Na discussão sobre os domínios (que era uma extensão à tarefa), os alunos não tiveram dificuldade em compreender a definição de função soma, diferença, produto e quociente. Ao discutir o domínio da função quociente, usei mais exemplos do que os planificados para que a turma compreendesse bem a ideia de que a função em denominador não se pode anular e aproveitei também para referir, usando um exemplo, que o quociente de funções não é uma operação comutativa.

Como planifiquei a introdução dos conceitos de função diferença, produto e quociente aquando da discussão da tarefa 26, pensei preencher o tempo restante da aula com uma tarefa que permitisse perceber se os alunos tinham compreendido estas noções. Escolhi com este intuito a tarefa 84 da página 99 do manual que é um problema de interpretação gráfica em que os alunos devem fazer uma escolha justificada usando a definição de função diferença. Esta tarefa permitiu aos alunos usar a definição de função diferença na interpretação de gráficos. Esta aula correu de acordo com o planeado e foram cumpridos todos os objetivos de aprendizagem previstos.

18 de Fevereiro de 2014

Os meus objetivos para a segunda aula, lecionada no dia 18 de Fevereiro e com a duração de 50 minutos, foram o estudo da paridade das funções soma, diferença, produto e quociente e, ao mesmo tempo, verificar como os alunos procedem para dar resposta a questões dirigidas à argumentação matemática. A aula iniciou-se com uma revisão dos conceitos necessários para a resolução da ficha de trabalho “Estudar a Paridade”, nomeadamente as noções gráficas e algébricas de função par e ímpar. Foi também recordada a noção de função real de variável real. Estavam previstos 15 minutos para o trabalho autónomo dos alunos mas, ao circular pelos pares, apercebi-me de dificuldades ao nível da interpretação e da argumentação e decidi dar-lhes mais dez minutos para trabalhar na tarefa.

Percebi que talvez devesse ter ordenado as perguntas da ficha de outra forma, porque, apesar da questão 1 ser mais fechada que a questão 2, a formulação ‘mostra que se…, então…’ levou muitos alunos a não identificarem o que eram as hipóteses e o que se queria mostrar, achando que tinham de mostrar que as funções eram ímpares primeiro e depois mostrar que a função soma era ímpar (exemplo da versão A) enquanto na questão 2, a formulação ‘supondo que…, verifica…’ foi mais clara para os alunos que perceberam logo o que era para assumir como hipótese. Depois de ultrapassada a dificuldade com a primeira questão, os alunos tiveram mais facilidade a responder às outras questões, mas muitos não tiveram já tempo de terminar a ficha, apesar do tempo previsto para este momento de aula ter sido estendido. Por isso, privilegiei a discussão final da ficha e já não houve tempo para esclarecer dúvidas sobre os trabalhos para casa propostos na aula anterior.

Dividi o quadro em três colunas, uma para a função soma, outra para a função diferença e outra para a função produto e expliquei aos alunos que havia versões diferentes da ficha e que as íamos discutir em paralelo, questão por questão. Pedi a uma aluna que fizesse a resolução da questão 1 e pedi-lhe que explicasse à turma como pensou, mas devido à falta de tempo, acabei por decidir guiar um pouco mais a discussão, fazendo passo a passo com a ajuda dos alunos a questão 1 das outras duas versões. No final, os alunos evidenciaram perceber que na questão que começa com ‘mostra que…’ já são conhecidas as hipóteses e a tese, e temos de provar aquilo que é pedido e na questão que começa com ‘verifica se…’, só temos as hipóteses mas não sabemos o que vamos obter. A discussão da questão 3 ficou para o início da aula seguinte.

19 de Fevereiro de 2014

A aula de dia 19 de Fevereiro era de 100 minutos e já tinha planeado introduzir a noção de função composta nessa aula, mas achei que era essencial discutir e sumariar algumas das ideias da ficha de trabalho ”Estudar a Paridade”, uma vez que os processos de prova e de interpretação de questões dirigidas à argumentação usados na resolução da ficha são importantes ferramentas na argumentação matemática dos alunos. Assim, condensei numa nova ficha (Anexo D) essas ideias e discuti-a, com os alunos projetando-a no quadro com recurso a acetatos e retroprojetor, durante os primeiros dez minutos da aula. Foquei-me nos aspetos de argumentação matemática como as hipóteses, teses e processos de prova, mais do que nos resultados obtidos em cada questão, uma vez que este era o aspeto essencial desta ficha.

Optei por fazer um momento de esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos propostos para casa das duas primeiras aulas porque achei que era importante consolidar as aprendizagens sobre as operações mais familiares, antes de introduzir a função composta que é uma operação totalmente nova para os alunos. Não havendo muito tempo para este momento de aula, discuti apenas as tarefas propostas na aula de dia 18 (1.ª aula da intervenção). Baseada no que observei durante a correção dos trabalhos dos alunos, comecei por pedir a uma aluna que fosse ao quadro resolver a primeira questão e que explicasse aos colegas como pensou, enquanto eu distribuí pelos colegas os trabalhos já corrigidos e comentados. A correção das tarefas seguintes foi escrita por mim no quadro em interação com os alunos. Foram discutidos os erros e dificuldades mais comuns que identifiquei ao corrigir os trabalhos. As alíneas que não tinham gerado dúvidas foram corrigidas apenas oralmente. Apesar disso, este momento estendeu-se além do planeado, não havendo tempo para corrigir uma das tarefas previstas.

A aula continuou com a ficha de trabalho “Composição de Funções”, mas já não houve tempo para realizar a tarefa do manual, prevista para o fim da aula. Os alunos aderiram bem à tarefa da ficha e acharam o contexto interessante. As questões levantadas pelos alunos corresponderam às que constam da planificação (Anexo A), tendo a realização demorado o tempo previsto. A discussão da tarefa foi realizada tendo por base as resoluções dos alunos, que foram ao quadro apresentá-las. Ao selecionar alunos para ir ao quadro, tive em conta os critérios que tinha definido na planificação da aula, tentando ao mesmo tempo, variar os alunos que apresentaram as suas resoluções, em cada aula.

Na questão 1.3, houve um aluno que, durante a realização da tarefa me chamou para perguntar como é que sabia se o domínio era um intervalo ou era "$\mathbb{R}$ excepto qualquer coisa" (retirado de: notas de campo) e acabou por perceber que $[8000, +\infty[= \mathbb{R} \backslash]-\infty, 8000[$. Pedi a este aluno que fosse ao quadro resolver esta questão que se discutiu com o resto da turma. Na questão 2.3.1, selecionei para ir ao quadro uma aluna que tinha apresentado erradamente a resposta com um número não inteiro. Foi discutida a ideia de que o número de bilhetes deve ser inteiro e arredondado por excesso para obter um lucro superior ao mínimo. A construção da função composta foi feita em conjunto com os alunos e estes compreenderam a ideia de que as imagens da primeira função são os objetos da segunda função, ou seja, que as funções são aplicadas uma após a outra. Em relação ao domínio da função composta da ficha, os alunos ajudaram a construí-lo e compreenderam a sua expressão, mas a expressão geral do domínio de uma função composta gerou mais dúvidas. Fiz, ainda, com os alunos, alguns exemplos que consistiam em encontrar a função composta, dadas duas funções e outros em que dada uma função se pretendia decompô-la em outras duas cuja composição fosse a função dada. Os alunos corresponderam bem e participaram quase em coro nestes exemplos.

24 de Fevereiro de 2014

A segunda semana da minha intervenção começou com a aula de dia 24 de Fevereiro e teve a duração de 100 minutos. Os objetivos principais para esta aula eram compreender a definição de permutabilidade de funções e estudar a monotonia da função composta e fazer uma pequena introdução à definição de funções inversas uma da outra. Reservei também algum tempo da aula para esclarecer dúvidas dos trabalhos para casa que não tinham sido corrigidos nas aulas anteriores, como forma de consolidar os conhecimentos sobre operações com funções, antes de avançar para a subunidade sobre função inversa (Tabela 8) que iniciaria na aula seguinte. A aula começou, como sempre com a escrita do sumário e lições e com um breve questionamento sobre o que tinha sido abordado na aula anterior. Procurei fazer isto em todas as aulas que lecionei, como forma de avaliar as aprendizagens que os alunos haviam realizado, ou não, anteriormente.

Comecei a apresentação da ficha de trabalho “Algumas propriedades da composição de funções” relembrando, com a ajuda dos alunos, o que é uma função monótona, escrevendo no quadro a definição algébrica de função crescente e decrescente exemplificando cada uma delas com uma função representada graficamente. Estas definições e exemplos ficaram no quadro enquanto os alunos começaram a trabalhar sobre a tarefa, para poderem ser consultadas por estes. Os alunos tiveram dificuldades em iniciar a exploração da tarefa, por isso questionei a turma “estamos a resolver uma tarefa que começa com ‘investiga’, tínhamos visto da última vez que era boa ideia começar por…” (retirado de: gravação áudio das aulas) e logo um aluno respondeu que deviam formular hipóteses. Sugeri-lhes então que começassem por supor que as funções eram ambas crescentes ou ambas decrescentes e trabalhassem a partir daí. Na questão 1, os alunos mostraram dificuldades em trabalhar com a definição algébrica de função crescente e decrescente. Esta dificuldade deve-se ao facto de, no 10.º ano, já terem visto e escrito estas definições mas, na prática, terem estudado estas características sempre com base no gráfico da função.

Como já tinha previsto que ia haver dificuldades e, como a natureza e propósito das questões 1 e 2 são bastante diferentes, optei por fazer a discussão da questão 1 antes de avançar para a resolução da questão 2 (ver Planificação, Anexo B). Pedi a uma aluna que resolvesse a questão 1.1 no quadro mas esta afirmou logo que “eu faço, mas não sei bem explicar” (retirado de: notas de campo). Por isso fui questionando a turma e dirigindo um pouco mais a discussão e a realização da questão 1.2. Usei alguns exemplos gráficos para ilustrar a ideia de que se as funções tiverem o mesmo sentido de variação, a função composta é crescente e se tiverem sentido inverso, é decrescente.

Passámos depois para a resolução da questão 2 da ficha de trabalho e, logo no início do trabalho autónomo recordei com os alunos o significado de ‘caracterizar uma função’ porque alguns pares consideraram que se pretendia ‘fazer o estudo da função’. Na questão 2, os alunos não mostraram dificuldades de maior, talvez porque tratava com funções particulares e não era tão abstrata. Quando planifiquei a aula, ainda ponderei sobre a ordem das questões, mas optei por utilizar a questão 2 para fazer a ponte para as funções inversas, fazendo mais sentido ficar para o final. No entanto, parece-me que será de considerar alterar a ordem numa aplicação futura destas tarefas porque, o que se perde em coerência e linearidade dos temas, talvez se ganhe em compreensão.

A discussão sobre a não comutatividade da composição de funções e consequente definição de funções permutáveis foi bastante participada e os alunos compreenderam bem estas questões, respondendo imediatamente às questões colocadas sobre os exemplos usados. Também tiveram facilidade em compreender a definição de função identidade e de funções inversas uma da outra. Dedicámos depois um momento ao esclarecimento das dúvidas dos trabalhos de casa, que correu conforme o previsto. A tarefa que estava prevista para o final da aula de dia 19 de Fevereiro foi proposta nesta aula como trabalho para casa e retirei uma das que tinha previsto propor porque os alunos afirmaram ter de estudar para o exame da disciplina de inglês.

25 de Fevereiro de 2014

A aula de dia 25 de Fevereiro teve a duração de 50 minutos e começou com o esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos propostos para casa. Optei por fazer este momento logo no início da aula porque esta era a primeira da subunidade sobre função inversa (apesar de já termos introduzido a noção de funções inversas entre si, na aula anterior) e queria certificar-me que não ficavam dúvidas sobre a unidade anterior. Depois, os alunos iniciaram a resolução da tarefa 102 da página 108 do manual, correspondendo bem ao trabalho solicitado. Na questão 108.2 houve um par de alunos que usaram uma 'regra de três simples' para determinar a quantidade de combustível que se pode abastecer com 35€. Durante a discussão em grupo-turma, comparei esta resolução com a que a maioria dos alunos usou e que usava a expressão algébrica da função determinada na alínea anterior. Aproveitei para discutir a utilização de 'regras de três simples' relacionando-as com as funções de proporcionalidade direta e lembrando os alunos de uma investigação que tinham feito no início do período sobre estas funções, usando sensores.

A discussão que se seguiu à tarefa, sobre funções invertíveis e como encontrar a inversa de uma função, foi bastante participada e os alunos compreenderam estes conceitos, uma vez que responderam sem dificuldade a todas as questões formuladas sobre os exemplos que fui pondo no quadro. Ao discutir exemplos de funções não invertíveis, um aluno formulou a conjetura que a função ser ou não invertível dependeria do grau do polinómio associado à função. Foi apresentado então o exemplo da função módulo que não estava planificado e que serviu para refutar a conjetura. Os alunos enunciaram a ideia de que uma função só seria invertível se cada imagem estivesse associada a um único objeto e acabaram por mencionar a noção de injetividade. Quando discutimos a relação entre domínio e contradomínio de uma função e da sua inversa, uma aluna conjeturou que "o domínio da função inversa é o contradomínio da função original" (gravação áudio das aulas) obtendo a concordância do resto da turma. No final da aula, ainda houve tempo para iniciar a resolução das tarefas que tinha planeado para trabalho de casa.

26 de Fevereiro de 2014

A aula de dia 26 de Fevereiro teve a duração de 100 minutos e foi a última antes da interrupção letiva do Carnaval e do Teste Intermédio. Os objetivos para esta aula eram consolidar os conhecimentos sobre funções inversas, compreender que os gráficos de duas funções inversas são simétricos relativamente à reta $y = x$ e compreender a relação entre o declive de uma função afim injetiva e da sua inversa. A tarefa que escolhi para a ficha de trabalho "Uma investigação sobre funções inversas" (anexo B) permitiu também aos alunos recordar muitos conceitos e procedimentos abordados ao longo do tema das funções e serviu já de alguma revisão para o teste intermédio.

Comecei por dar indicações aos alunos sobre o tempo para resolver a tarefa, solicitando o seu empenhamento para que fosse possível realizá-la e discuti-la de modo completo durante a aula. Apesar de a tarefa não ter um grau de dificuldade elevado, os alunos demoraram algum tempo nas questões respeitantes a conceitos aprendidos há mais tempo porque não se lembravam de como obter as assíntotas ou o contradomínio, por exemplo. Alguns recorreram à calculadora gráfica para os auxiliar na resposta às questões mas outros usaram apenas processos analíticos. Esta escolha foi autónoma, dado que deixei optar pelo processo que preferissem. Também identifiquei algumas dificuldades nas questões 5 e 6 da tarefa, porque os alunos não sabiam exatamente o que se pretendia comparar e relacionar.

Iniciei a discussão quando a maioria dos pares terminou a resolução da questão 6, solicitando aos restantes que interrompessem a resolução para se focarem na discussão. Este foi um aspeto de constante trabalho, para mim, enquanto professora: levar os alunos a distinguir claramente os momentos de trabalho dos momentos de discussão. Penso que ainda tenho de melhorar este aspeto mas acho que houve alguma evolução no decorrer deste ano letivo. Na sequência da discussão em grupo-turma, dois alunos foram ao quadro apresentar as suas resoluções da questão 1. Selecionei-os porque um deles tinha partido da expressão $\frac{x-2}{x+1}$ para chegar a $1-\frac{3}{x+1}$, usando o algoritmo da divisão de Euclides, e outro optou por partir da segunda expressão para chegar à primeira. Questionei a turma sobre a completude da resolução e vários alunos assinalaram a necessidade de justificar os domínios, mostrando compreender a noção de igualdade de funções.

Durante a discussão da questão 3, aproveitei para explorar a resolução de um aluno que, durante o trabalho autónomo, quis saber como provar analiticamente que uma função é injetiva e, com ajuda inicial de uma das professoras, acabou por resolver a questão desta forma. Resolvi explorar esta forma de resolução e pedi a este aluno e a uma colega para resolverem lado a lado a questão 3. Discutimos primeiro a resolução que se baseava em argumentos gráficos, pois era a que a maioria dos alunos tinha usado, acabando por desenhar a representação gráfica da função. A resolução analítica revelou-se mais difícil para os alunos mas acabaram por compreender a ideia da prova por contra recíproco, uma vez que estão habituados a definir função injetiva usando a implicação $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e na prova, utilizamos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Ao discutir a questão 4, foram escritos no quadro os pontos de interseção com o eixo, as assíntotas e o domínio e contradomínio mas a comparação com a função original foi feita apenas oralmente mas penso que deveria ter sido escrita, uma vez que os alunos tinham mostrado dúvidas aquando da resolução. A questão 7 foi resolvida em grupo-turma com uma função afim sugerida pelos alunos, o que facilitou a resolução da tarefa do manual que tinha previsto para a segunda parte da aula (ver planificação, anexo A). Os alunos concluíram sem dificuldade que os gráficos de funções inversas eram simétricos relativamente à reta $y = x$.

Na realização da tarefa 108 da página 113 do manual, alguns alunos perguntaram se deveriam usar uma função particular enquanto outros usaram de imediato a expressão geral de uma função afim. Todos os alunos conseguiram resolver o problema percebendo a relação entre os declives das retas. A aula terminou com a correção de algumas das tarefas propostas para trabalho de casa em aulas anteriores.

12 de Março de 2014

A aula de dia 12 de Março teve a duração de 100 minutos e foi a primeira depois da interrupção e do Teste Intermédio, que os alunos afirmaram não ter corrido muito bem. Como a função inversa não fazia parte dos temas abordados nesse teste, as tarefas propostas para trabalho de casa, relacionadas com este tópico ainda não tinham sido corrigidas e eu sabia que havia dúvidas por ter recolhido, corrigido e comentado os trabalhos dos alunos. Iniciei então a aula esclarecendo algumas dessas dúvidas. Este momento estendeu-se um pouco mais do que eu esperava, porque tinha passado já algum tempo desde a sua realização. Usei diversos exemplos de funções que retirei das resoluções dos alunos dos trabalhos de casa e discutimos uma a uma.

A segunda parte da aula tinha como objetivos: definir raiz índice n de um número real, percebendo que se n for par, só podemos definir para números reais positivos; rever as regras de operações com radicais abordadas no 9.º e 10.º ano; compreender a definição de função com radicais/irracional e estudar algumas características destas funções (com ênfase no domínio). Iniciei-a com uma discussão em grupo-turma na qual se definiu, com a ajuda de exemplos, raiz índice n de um número real com referência à nomenclatura associada (radical, radicando, índice da raiz) e ao conjunto em que as raízes de índice par e ímpar estão definidas. Seguiu-se a resolução de algumas tarefas do manual (ver planificação, anexo A).

Enquanto alguns pares fizeram todas as alíneas da tarefa 116 (quando só estavam previstas quatro), a tarefa 118 e ainda algumas das tarefas previstas para trabalho de casa, outros não chegaram a acabar as duas tarefas previstas antes da respetiva discussão. Na altura, optei por dar mais uns minutos para que todos pudessem acompanhar melhor a discussão mas isso acabou por atrasar o início da resolução da tarefa 46 do manual, que permitiria atingir alguns dos objetivos didáticos desta aula. Penso que teria sido mais vantajoso trocar a ordem das tarefas porque, apesar da manipulação de radicais e os raciocínios usados nas tarefas 116 e 118 serem essenciais, poderiam ser feitas depois da tarefa 46.

Ao longo da discussão da tarefa 116, foram sendo sintetizadas, as regras de operações com radicais e surgiram dúvidas sobre a multiplicação de raízes de índice diferente. Os alunos conjeturaram que deveria obter-se um radical cujo índice seria a soma desses dois. Optei por dizer aos alunos que essa regra não era válida e adiei a justificação para a aula seguinte. Ao discutir a tarefa 118, aproveitei para lembrar os alunos da necessidade de explicitar o significado de todas as variáveis que usam (neste caso usaram a letra x para designar o comprimento do lado do retângulo).

Na questão 1 da proposta 46, muitos alunos tiveram dificuldade em determinar entre que valores poderia estar compreendida a variável e a diferença de ritmos de trabalho continuava a fazer-se notar. Além disso, devido a interrupções extensas e imprevistas a discussão da tarefa terminou na primeira questão, alterando a planificação da aula de dia 17 de Março, uma vez que não foi possível definir função racional e o seu domínio máximo de definição.

17 de Março de 2014

Algumas das tarefas que tinha previsto propor para trabalho de casa na aula de dia 12 de Março, não puderam ser resolvidas pelos alunos autonomamente e foram integradas na aula de dia 17 (anexo A), antes de começar o tópico das potências de expoente racional. Nesta aula, com a duração de 100 minutos, os meus objetivos foram: definir função racional e estudar o seu domínio; compreender a definição de potência de expoente fracionário; rever a diferença entre equivalência e implicação; e a resolução de equações com radicais confirmando as soluções por experimentação. Na discussão da tarefa 46, iniciada na aula anterior, foi necessário retomar o trabalho realizado pelos alunos e optei por ser eu a escrever a resolução no quadro em interação com os alunos. Os alunos participaram na discussão sobre a definição de função com radicais, respondendo a todas as questões colocadas e discutiu-se também o domínio máximo de definição desta classe de funções.

As tarefas 112 e 113 são exercícios de aplicação que os alunos resolveram com facilidade dentro do tempo previsto e foram resolvidas no quadro, também por mim mas em interação com os alunos, para ser mais rápido. A discussão introdutória sobre as potências de expoente racional demorou um pouco mais que o previsto, porque os alunos já não se lembravam do que era uma potência e tivemos de fazer uma pequena revisão sobre as de expoente natural, zero e inteiro negativo. Houve inclusive uma aluna que afirmou “isso eu não dei! Com o -1 não dei!” (gravação áudio das aulas). Revi também as regras das potências e discutimos a definição de potência com expoente fracionário. Depois, fizemos alguns exemplos de conversão entre representação de potência e radical, sendo os próprios alunos a ditar síntese com a definição de potência de expoente racional.

Na resolução da tarefa 122 da página 121 do manual, os alunos mostraram, além das previsíveis dificuldades em usar este novo conceito, outras relacionadas com a função definida por ramos e no uso das regras das potências. Vários alunos cometeram o erro de considerar que $\frac{f(-1)}{f(\sqrt[3]{2})} = f\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Como eu não o tinha previsto optei por discuti-lo com a turma e levá-los a perceber porque é que esta igualdade só se verifica para funções particulares e não é uma propriedade geral. Na questão 122.3 surgiram duas estratégias diferentes de resolução que foram discutidas em grande grupo. Não havendo tempo para realizar e discutir a tarefa 32 da página 125 do manual, optei por corrigir os trabalhos propostos para casa nas aulas anteriores, porque tinha identificado bastantes dúvidas nalgumas das tarefas.

18 de Março de 2014

A aula de dia 18 de Março teve a duração de 50 minutos e iniciou-se com a resolução da tarefa 32 da aula anterior. Os alunos trabalharam de forma empenhada e conseguiram resolvê-la dentro do tempo previsto. Os alunos evidenciaram, na questão 1, dificuldades em justificar as conjeturas que formularam. Desafiei-os a ler primeiro as três alíneas da questão e construírem depois a resposta para cada uma. Na discussão desta questão, os alunos perceberam a diferença entre uma implicação e uma equivalência e uma aluna chegou a usar simbologia adequada para ‘não implica’. Também foi discutida a ideia que, na justificação da resposta à questão 1.2, poderia ser usado um contraexemplo.

Na questão 2.1 os alunos optaram por calcular o comprimento do fio no caso em que C coincide com B e no caso em que coincide com D. Aproveitei a discussão para lhes relembrar a desigualdade triangular, aprendida no 2.º ciclo, que permitia justificar a resposta de uma forma bastante mais rápida. Solicitei também aos alunos que explicassem como proceder para responder à questão 2.2.2 com o auxílio da calculadora gráfica, relembrando as funcionalidades da calculadora mais usadas no tema das funções, pois ouvi vários alunos a comentar que sentiam dificuldades em resolver questões com o auxílio da calculadora gráfica, especialmente em situação de teste de avaliação. A tarefa 124 da página 123 do manual, inicialmente prevista para esta aula, não chegou a ser resolvida na sua totalidade, nem discutida no tempo da aula. Foi terminada na aula seguinte e já não fez parte da minha intervenção. Ao longo da minha intervenção, abordei todos os tópicos essenciais das funções com radicais, exceto a relação entre as funções com radicais e as funções potência, embora os alunos não tenham tido oportunidade de resolver tarefas de consolidação em número desejável.

19 de Março de 2014

Na aula de dia 19 de Março, nos últimos momentos de aula, apresentei aos alunos o enunciado do relatório escrito individual (Anexo C) que lhes solicitei com o objetivo de desenvolver a capacidade de resolução de equações com radicais, definir uma elipse e avaliar os conhecimentos aprendidos no tópico das funções com radicais. Comecei por usar um pequeno vídeo (disponível em https://www.youtube.com/watch?v=7UD8hOs-vaI), que mostra como desenhar uma elipse usando corda, um lápis e dois pioneses, uma vez que os alunos nunca tinham trabalhado com elipses nem conheciam esta forma geométrica. Lembrei-lhes que já deviam ter ouvido falar de linhas elípticas quando abordaram as órbitas dos planetas do sistema solar na disciplina de Ciências da Natureza. Discuti a definição e o teorema apresentados no enunciado do relatório e li, com os alunos, cada uma das questões procurando garantir que percebiam o que se pretendia em cada uma delas. Discuti com os alunos o guião do relatório e os aspetos que iam ser foco de avaliação, esclarecendo as questões que os alunos foram colocando. Disponibilizei o meu endereço de *email* para que os alunos pudessem colocar mais questões que surgissem até à data de entrega.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

O primeiro passo para o trabalho de cariz investigativo que desenvolvi, foi elaborar uma carta de autorização de recolha de dados, que foi aprovada pela direção da escola e lida e assinada por todos os encarregados de educação dos alunos. Este documento (Anexo E) serviu para explicar o objetivo do meu trabalho e que tipo de dados iria recolher, perante os encarregados de educação, para que pudessem dar o seu consentimento informado (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Referi também, neste documento, a confidencialidade dos dados pessoais dos alunos (Cohen et al., 2007).

Atendendo aos objetivos e às questões de estudo, optei por recolher dados através da observação e recolha documental. A observação recaiu sobre as aulas lecionadas, sobretudo durante a realização das tarefas pelos alunos. Quivy e Campenhoudt (2005) distinguem observação direta e indireta. A primeira refere-se àquilo que o investigador consegue ver e ouvir sem ter de interagir com os participantes e a segunda ocorre quando se questiona os alunos ou se pede para explicar o que fizeram. Estes autores defendem que a observação direta é especialmente adequada para analisar a comunicação não-verbal, por exemplo estudando o comportamento de um grupo aquando da resolução de uma tarefa, e apontam como limitações: (1) a dificuldade de registo dos dados e a (2) interpretação das observações feitas.

Para reduzir os efeitos da primeira limitação indicada pelos autores, após a observação do trabalho dos alunos em sala de aula elaborei notas de campo com informação sobre os progressos, erros, estratégias adotadas e aprendizagens que os alunos revelaram e reconstruções de partes de diálogos ocorridos entre alunos e aluno-professor (Cohen et al., 2007). Incluí, ainda, a descrição do meu papel em cada momento da aula e do papel dos alunos, salientado acontecimentos importantes para o decorrer da aula e situações como faltas de alguns alunos ou a presença de outros observadores, como as professoras orientadoras (Cohen et al., 2007).

Para minimizar os erros de interpretação que a observação direta pode gerar, recorrerei ao questionamento dos grupos de forma a melhor perceber o seu pensamento (Quivy & Campenhoudt, 2005), uma vez que a conjunção destes dois métodos vai permitir-me perceber melhor o raciocínio dos alunos (NCTM, 2000). Enquanto observadora participante, considerarei como dados as minhas interações com os alunos (Cohen et al., 2007), tanto durante o trabalho autónomo dos mesmos, como durante as discussões em grupo-turma.

Este duplo papel de professora e investigadora participante tem diversas vantagens e obstáculos. Por um lado, diminui a reação de estranheza dos alunos perante alguém desconhecido e, por isso permite obter dados mais genuínos, especialmente no que diz respeito às interações entre investigador e alunos, mas por outro lado, esta proximidade pode comprometer a objetividade do estudo, uma vez que o professor também se envolve pessoalmente no processo de ensino-aprendizagem (Cohen el al., 2007). Ponte (2004) aponta como formas de ultrapassar este obstáculo: (i) recorrer à teoria, fazendo uma revisão da literatura sobre o assunto a investigar; (ii) tirar partido da vivência num grupo, partilhando ideias com outras pessoas em situação similar (por exemplo o colega de estágio ou o professor da turma) e (iii) tirar partido do debate no exterior do grupo, discutindo com os orientadores ou com pessoas externas ao estágio. Estes diferentes pontos de vista ajudam a relativizar as nossas perspetivas.

Outro grande obstáculo que a investigação da própria prática acarreta é que é extremamente desafiador em termos da multiplicidade de tarefas que o professor tem de desempenhar em simultâneo com a observação. Santos (2005) refere como principais dificuldades de um professor-investigador "a solicitação por parte dos alunos, a atenção dirigida à observação, que leva a uma desconcentração nas respostas dadas às questões levantadas pelos alunos, o excesso de tempo para realizar a tarefa e o registo atempado da informação recolhida" (p. 178). Apesar disto, investigar a própria prática é uma experiência enriquecedora e que dá ao professor ferramentas para compreender e resolver os problemas que se apresentam nas suas turmas e na sua realidade diária (Ponte, 2004).

A recolha documental incluiu as produções escritas dos alunos (das tarefas realizadas durante a aula e do relatório individual proposto), as transcrições das gravações áudio de segmentos de aula. Cohen et al. (2007) defendem que a recolha documental é um meio de recolha de dados acessível e prático, mas que deve ser complementado com outros meios que permitam clarificar o seu conteúdo (como a observação e as entrevistas). As gravações áudio incidiram essencialmente sobre segmentos de discussões em grupo-turma que tinham por base tarefas que apelavam à argumentação matemática, pois pretendo estudar também a vertente oral da argumentação. Ericsson e Simon (1993) descrevem o processo de recolha e análise de dados áudio-gravados desta natureza e defendem que podem ter o mesmo grau de validade de um documento escrito, devendo as transcrições ser o mais fiéis possível, eliminando apenas repetições e hesitações. Estes autores defendem também que os dados serão tanto mais ricos e fiáveis, quanto mais questionamento houver por parte dos intervenientes e quanto mais abertas forem as perguntas e respostas dadas.

Os participantes neste estudo foram todos os alunos da turma onde realizei a minha intervenção letiva. No entanto, como complemento à observação e aos dados recolhidos, realizei entrevistas (guião no anexo D), gravadas em áudio. A entrevista tem como característica fundamental o facto de ser um contacto direto entre o entrevistador e o entrevistado permitindo retirar informações muito ricas e completas (Quivy & Campenhoudt, 2005). Optei por elaborar um guião com questões abertas, tendo em mente uma entrevista semi-estruturada onde a ordem das perguntas pode ser alterada ou podem surgir no momento novas perguntas (Quivy & Campenhoudt, 2005; Cohen et al., 2007).

A entrevista foi realizada individualmente a três alunos. Um dos critérios de escolha foi a facilidade de comunicação dos mesmos, para que dessem respostas o mais completas possível. Também quis selecionar alunos representativos dos três modos distintos de trabalhar em aula, descritos no capítulo 3.1. Dado o objetivo do estudo, pareceu-me que o nível de autonomia e rapidez de raciocínio dos alunos pudesse ser um fator na sua forma de argumentar matematicamente. Estas entrevistas foram realizadas três dias depois da entrega dos relatórios escritos dos alunos e duraram cerca de 20 minutos, cada uma. Foram realizadas na escola, na Biblioteca/Centro de Recursos num horário em que os alunos não tinham aulas. Uma vez que as entrevistas são um método de recolha de dados especialmente adequado para procurar interpretações pessoais de um dado evento (Quivy & Campenhoudt, 2005; Cohen et al., 2007), procurei elaborar questões baseadas numa primeira análise que fiz sobre os dados recolhidos durante a lecionação e sobre o relatório escrito entregue pelos alunos.

O objetivo das duas primeiras questões era, por um lado perceber a relação que os alunos têm com a disciplina de Matemática e, por outro, deixar os alunos mais confortáveis com a situação de entrevistados antes de avançar para questões mais relacionadas com o meu estudo. A terceira questão, foca-se nas aprendizagens sobre funções realizadas durante a minha intervenção letiva e tem por objetivo perceber que conhecimentos os alunos recordam com mais facilidade. As questões 4, 5 e 6 são relativas a argumentação em geral e as questões 7 a 10 debruçam-se sobre o relatório escrito individual. Estes dois últimos blocos de questões têm como objetivo perceber melhor as etapas por que passam os alunos quando resolvem uma tarefa dirigida à argumentação e como encaram este processo. Se percebem, se gostam, se reconhecem utilidade nos processos de prova matemática ou se os exemplos particulares lhes dão o mesmo grau de certeza e não sentem necessidade de demonstrações.

5. Análise de dados

Ao longo deste capítulo procurei apresentar e analisar alguns dos dados recolhidos, tendo por base as questões formuladas neste estudo. Não pretendi ser exaustiva na apresentação de dados e, por isso, do trabalho realizado pelos alunos nas tarefas propostas nas aulas da unidade de ensino e no relatório final, selecionei alguns excertos das suas resoluções ou das discussões em grande grupo onde fossem mais evidentes os processos argumentativos que os alunos privilegiaram, as dificuldades que enfrentaram na sua utilização e os conhecimentos sobre funções que mobilizaram, de modo a permitir dar resposta às questões do estudo.

5.1 Processos argumentativos (justificação, prova ou demonstração)

Comecei por analisar as justificações, provas e demonstrações produzidas pelos alunos, tentando perceber as suas dificuldades e o que os motiva a produzi-las (verificação, explicação, descoberta, sistematização, desafio intelectual ou comunicação). Tentei, igualmente, identificar as conjeturas que formularam, como as testaram e o tipo de prova que utilizaram (prova por exibição, prova com recurso ao exemplo genérico ou prova intelectual). Procurei, ainda, compreender se os alunos se apoiam em convicções externas, esquemas empíricos ou esquemas dedutivos e se sabem distinguir dados e hipóteses quando estão a tentar compreender ou produzir uma prova.

Conjeturar

Ao longo das primeiras três questões da tarefa ‘Igualdade de funções’, os alunos exploram as duas funções dadas obtendo alguns resultados que os levam a acreditar que as funções são iguais (como na questão 1) e outros que os podem fazer notar que as funções são, de facto, diferentes. Ao responderem à questão 4, os alunos têm de avaliar estes resultados, como um todo e estabelecer uma conjetura sobre se as funções são ou não são iguais. Em seguida devem validar ou refutar essa conjetura argumentando matematicamente. Seis alunos conjeturaram que as funções eram iguais porque ao simplificarem a expressão algébrica de g, obtiveram uma expressão igual à de f. Este processo dedutivo está incompleto, porque os alunos não tiveram em conta o domínio de definição das funções apresentadas. Estes alunos usaram erradamente esta prova incompleta como verificação, uma vez que o seu objetivo era estabelecer a veracidade da conjetura.

Cinco alunos simplificaram a expressão algébrica da função g mas não quiseram arriscar uma conjetura, por falta de confiança na sua argumentação devida a alguma falta de contacto com tarefas que impliquem comparar, concluir ou investigar. Só uma aluna afirmou que "não [são iguais], porque apesar de para os mesmos objetos as imagens serem iguais, o domínio é diferente" (retirado de gravação áudio das aulas). Durante a discussão, foi apresentada no quadro uma resolução em que se afirmava que as funções eram iguais e esta aluna argumentou de uma forma muito convicta, convencendo os colegas de que o domínio era determinante para classificar duas funções como iguais ou diferentes.

Nesta tarefa, houve apenas uma aluna que respondeu que as funções eram iguais, baseada nos casos particulares calculados na questão 1 (figura 5). Esta aluna não sentiu a necessidade de provar a igualdade em qualquer ponto do domínio, mostrando usar um raciocínio ainda indutivo.

Figura 5. Resposta à questão 4 da tarefa Igualdade de Funções

É de notar que esta aluna só calculou as imagens das funções para os três valores propostos no enunciado que são todos ímpares, positivos e primos, ou seja, estes exemplos são muito pouco abrangentes (não se experimentou para nenhum valor negativo nem não inteiro) e não são suficientes para convencer, mesmo a própria aluna da igualdade das funções em todos os pontos. Houve um único par de alunos que, ao resolver a questão 1, experimentou calcular as imagens de um número negativo, um número par e um número não inteiro, antes de tirar conclusões. Isto mostra que estes alunos compreendem a necessidade de fortalecer uma conjetura com exemplos escolhidos sistematicamente de forma a serem o mais abrangentes possível.

Na extensão da tarefa 102 da página 111 do manual, questionei os alunos se a correspondência inversa de uma função seria sempre uma função, levando-os, também aqui, a formular uma conjetura. Cerca de metade da turma respondeu imediatamente que sim e outra metade respondeu que não, mas sem justificar a sua resposta. Ao estudar o caso particular da função $h(x) = x^2$, um aluno conjeturou que a invertibilidade de uma função seria determinada pelo grau do polinómio associado à mesma, baseado nos exemplos da função do enunciado da tarefa e da função h. Ao observarem um contra exemplo proposto por mim, os alunos perceberam que a propriedade de ser invertível depende da injetividade da função e não do grau.

> Professora: O que será que faz com que eu tenha a certeza que uma determinada função é invertível?
>
> Aluno 1: Eu acho que é por causa do grau, porque esta é de grau2 e a outra era de grau 1.
>
> Professora: E se for assim?
>
> [Escrito no quadro: $t(x) = |x|$]
>
> Professora: Aqui eu também vou ter duas opções ou não?
>
> Vários alunos: Sim.
>
> Aluna 2: Não! Só positivo.
>
> Professora: Por exemplo, se *t* for igual a 5, que opções é que eu tenho para *x*?
>
> Vários alunos: 5 e -5.
>
> Aluno 1: Pois, não funciona…

Já na tarefa ‘Uma investigação sobre funções inversas’, os alunos conjeturaram, durante a discussão final, que os gráficos de uma função e da sua inversa são simétricos relativamente à reta $y = x$, baseados em dois casos particulares: a função racional que fazia parte do enunciado da tarefa e uma função afim escolhida pelos alunos. Estes selecionaram a função $f(x) = 2x - 3$ por conhecerem a forma do gráfico e saberem que é uma função injetiva e, portanto, invertível. Estes dois exemplos foram usados como exemplo genérico explorando-os como representantes da classe das funções invertíveis de forma a estabelecer a veracidade da conjetura.

De seguida, ao resolver a questão 108 da página 113 do manual, provaram que a função inversa de uma função afim injetiva é também uma função afim e que o seu declive é o inverso do declive da função original. Todos os alunos conseguiram encontrar corretamente a expressão da função inversa e argumentaram que o declive era inverso, mas um par resolveu a questão apenas para um caso particular, usando-o como exemplo genérico, o que mostra usarem ainda um raciocínio indutivo baseado em casos particulares. Outros 4 alunos experimentaram também com um caso particular para melhor compreender a situação em estudo e depois provaram o caso geral (figura 6) produzindo uma prova intelectual como explicação, uma vez que o enunciado já afirmava a veracidade da afirmação.

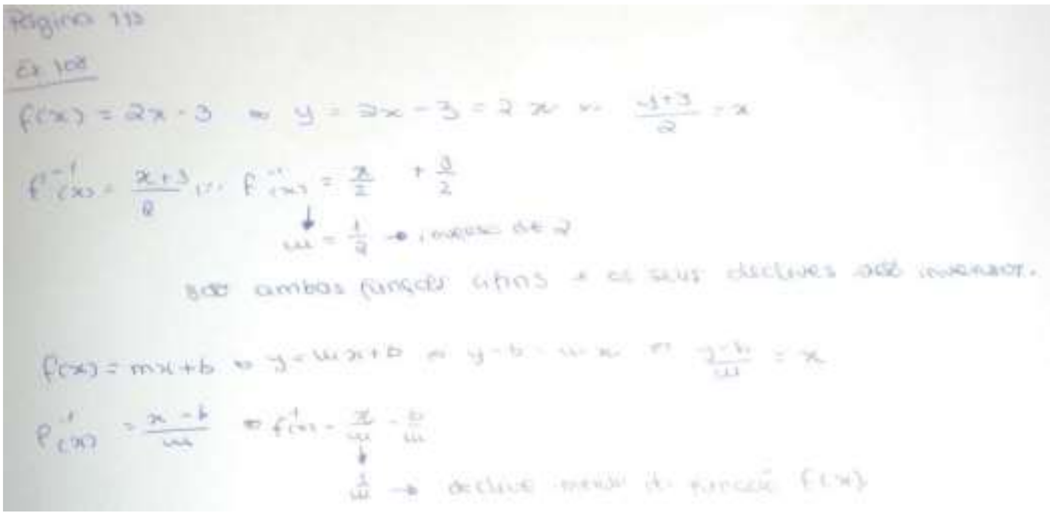


Figura 6. Resolução incompleta da tarefa 108 da pág. 113 do manual

Mas a maioria abordou logo o caso geral, em que usaram a expressão $f(x) = mx + b$ para encontrar corretamente a expressão da função inversa e argumentaram que os declives são inversos um do outro (figura 7), no entanto, dois deles não justificaram que a função inversa é afim, talvez por acharem que esta parte da prova era trivial.

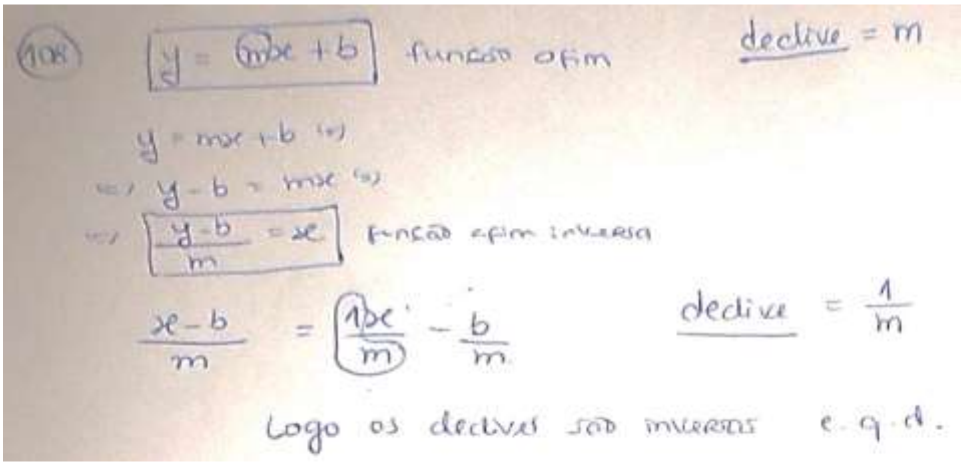


Figura 7. Resolução da questão 108 da pág. 113 do manual

Justificar

Na tarefa 'Igualdade de Funções', há duas questões que pedem explicitamente uma justificação. Na questão 2 os alunos são solicitados a determinarem o domínio máximo de definição das duas funções dadas, justificando a sua resposta. Alguns alunos justificaram corretamente usando apenas cálculos (5 alunos) e outros utilizaram a linguagem natural, por vezes complementada com cálculos (5 alunos), escrevendo que o valor 1 (para a função *f*) e os valores 1 e -1 (para a função *g*), não pertencem ao domínio da função porque anulam o denominador. Dois alunos limitaram-se a apresentar os domínios corretamente mas sem justificarem, outros 2 não conseguiram determinar os domínios e os restantes 4 apresentaram pelo menos um domínio incorreto. Dado que os alunos estavam a trabalhar a pares e que os erros identificados no trabalho de alguns alunos não se verificaram no do colega de carteira, nota-se falta de comunicação entre os pares de trabalho. Ao observar o trabalho autónomo dos alunos, apercebi-me de alguma dificuldade inicial em justificar por acharem que a resposta era demasiado óbvia para precisar de ser explicada, especialmente no caso da função *f* em que muitos alunos encontram o domínio mentalmente. Esta foi uma dificuldade recorrente em diversas tarefas: os alunos têm dificuldade em justificar algo que lhes parece óbvio.

Provas por exibição

Várias das tarefas de consolidação de conhecimentos solicitavam aos alunos que mostrassem uma dada igualdade ou expressão. Nestas tarefas os alunos construíram corretamente provas por exibição e as únicas dificuldades registadas prendem-se com mobilização de conceitos ou com erros de cálculo, e não com a construção da prova em si que consiste apenas numa cadeia de igualdades ou equivalências, uma vez que este tipo de prova é auto explanatória, não requerendo nenhuma argumentação suplementar. Na figura abaixo podemos ver um exemplo correto de resposta à tarefa 122 da página 121 do manual, em que os alunos produziram provas por exibição com o objetivo e explicar a igualdade apresentada no enunciado.

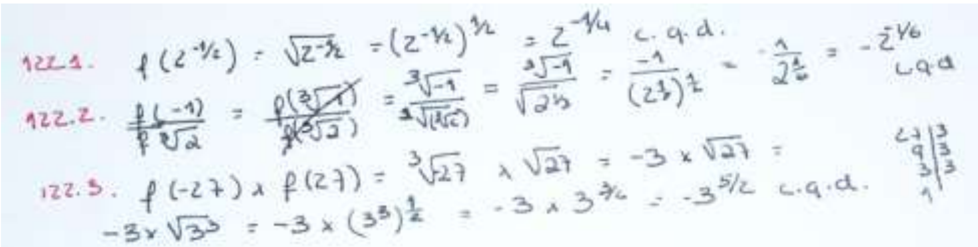


Figura 8. Resolução da tarefa 122 da pág. 121 do manual

Na questão 4 da tarefa ‘Uma investigação sobre funções inversas’, os alunos são solicitados a justificar que a função dada é invertível e caracterizar a inversa. 5 alunos, caracterizaram a função inversa sem justificar a invertibilidade. Ao observar o trabalho autónomo dos alunos, apercebi-me que estes assumem que se encontraram uma função inversa, é porque a função é invertível e não sentiram necessidade de argumentar mais. Os alunos encararam erradamente estra prova como exibição, em que não se acrescentam justificações e apenas se apresentam os cálculos ou afirmações. Nesta situação, para a questão ficar corretamente respondida, era necessário afirmar explicitamente que a correspondência inversa obtida era também ela uma função. Na discussão em grupo-turma, quando questionados “como justificamos que uma função é invertível?”, vários dos alunos que não tinham apresentado justificação responderam “temos de ver se é injetiva” (gravações áudio das aulas), mostrando que compreendem a definição de invertibilidade, mas não acharam necessário justificar.

Dos alunos que argumentaram sobre a invertibilidade da função, a grande maioria apoiou-se na representação gráfica da função e produziu uma justificação baseada na ideia intuitiva de injetividade (figura 9).

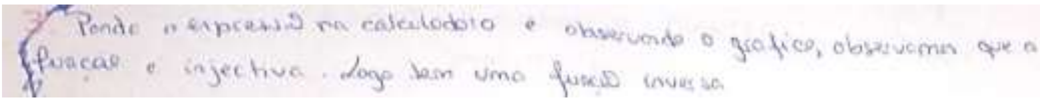


Figura 9. Resolução parcial da questão 3 da tarefa ma investigação sobre funções inversas

Apenas um aluno demonstrou analiticamente que a função f é invertível. O aluno produziu a demonstração autonomamente, tendo apenas pedido a uma das professoras que lhe relembrasse a definição analítica de função injetiva (figura 10).

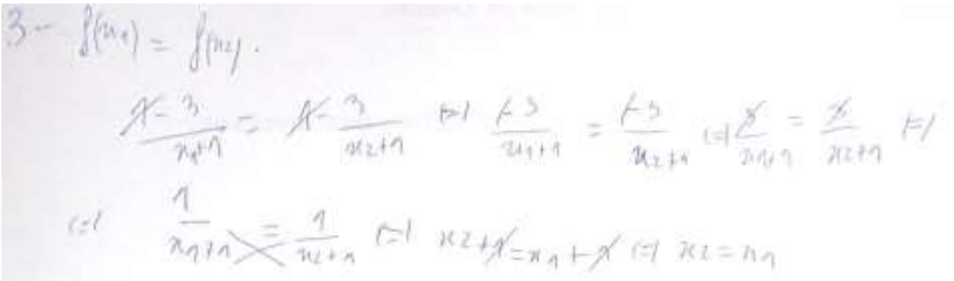


Figura 10. Resolução parcial da questão 3 da tarefa Uma investigação sobre funções inversas

Ao discutir esta demonstração com o resto da turma, os alunos tiveram alguma dificuldade em compreender que a demonstração é feita por contra-recíproco, uma vez que se prova que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ e não a implicação recíproca que é usualmente dada como definição algébrica de injetividade. No final da discussão, a maioria dos alunos compreendeu holisticamente a demonstração, ou seja, as ideias gerais que estão na base da mesma, e também a compreendeu localmente, dado que souberam justificar passo a passo o que estava a ser feito.

Professora: O que é que o P fez? Partiu da hipótese que as imagens eram iguais e chegou à conclusão que os objetos tinham que ser iguais. O que é que isso significa sobre a injetividade da função?

Vários alunos: Que ela é injetiva!

Provas intelectuais

A tarefa ‘Estudar a paridade’ foi elaborada em três versões diferentes, todas com a questão 1 do tipo ‘mostre que se … então…’, a questão 2 do tipo ‘verifica se…’ e a questão 3 do tipo ‘investiga a paridade de…’, variando apenas na operação de funções que era solicitada. As dificuldades observadas nas respostas dos alunos foram as mesmas nas três versões, indiciando que essas dificuldades estão relacionadas com o tipo de questão e não com a operação em estudo. Nesta tarefa, os alunos eram solicitados a produzir argumentações matemáticas de forma a justificar as suas conclusões.

Na questão 1 surgiram muitas questões e dificuldades da parte dos alunos, nomeadamente porque não conseguiam identificar os dados, as hipóteses e o que queriam mostrar. Vários alunos questionaram se tinham de mostrar que as funções eram ambas pares/impares e depois mostrar que a função soma/diferença/produto era par/ímpar. Isto mostra dificuldade em entender que uma das formas de provar uma implicação é assumir o antecedente como verdadeiro e tentar obter o consequente. Acabei por sugerir a toda a turma que escrevessem as hipóteses e a sua interpretação algébrica e depois escrevessem o que queriam obter, também interpretado algebricamente (figura 11).

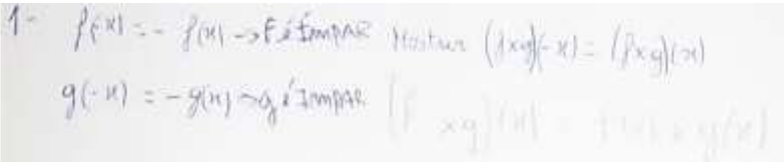


Figura 11. Separação do enunciado em hipóteses e tese

Um par de alunos, que tinha a versão B da ficha, não chegou a escrever nada na folha de resposta e um outro par de alunos, com a versão C, escreveu as hipóteses e o que se queria mostrar corretamente mas não conseguiu produzir a prova. Um par de alunos, com a versão A, construiu uma prova em que se parte da igualdade que se quer provar e obtêm igualdades equivalentes, até chegar a uma tautologia (figura 12).

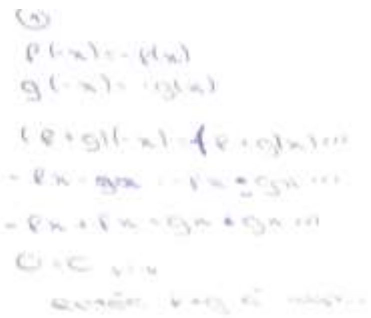


Figura 12. Resposta à questão 1 da tarefa Estudar a Paridade

Os restantes alunos da turma responderam corretamente usando uma prova em que partem de um dos membros da igualdade e chegam ao outro membro (figura 13). Isto mostra que os alunos conhecem já duas formas de provar analiticamente uma igualdade. Ambas as provas são intelectuais, faltando apenas a justificação formal de cada passo para que pudessem ser consideradas demonstrações. Os alunos usaram-nas como explicação, uma vez que queriam justificar uma proposição que já se sabia verdadeira.

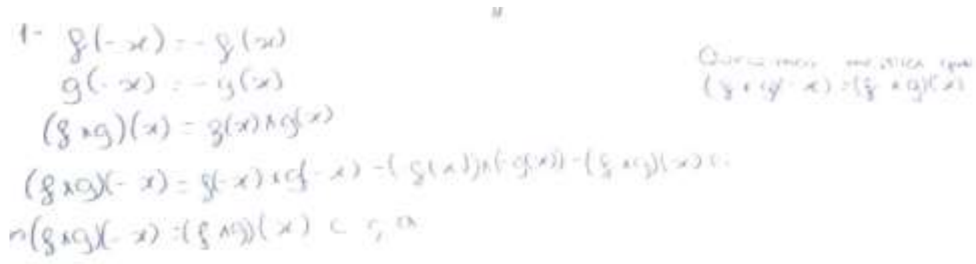


Figura 13. Resposta à questão 1 da tarefa Estudar a Paridade

Ao resolver a questão 2, um par de alunas seguiu o mesmo modelo de resolução da questão anterior, definindo à partida o que queriam mostrar (figura 14). Como estas alunas tinham a versão C da ficha de trabalho, tinham de verificar a paridade de $f - g$ assumindo que f e g eram ambas pares. Neste caso, a função diferença é também par, pelo que as alunas chegaram à proposição que definiram como tese. Mas se estivessem, por exemplo, a estudar a paridade da função produto quando as funções f e g são ímpares, já iriam obter o resultado inverso. Não tenho dados para concluir se as alunas analisaram as hipóteses antes de estabelecer a conjetura ou se apenas reproduziram a tese da questão 1 sem ponderarem se a situação era ou não semelhante.

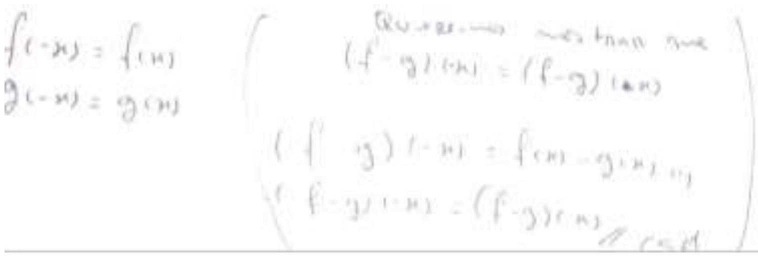


Figura 14. Dificuldade na questão 2 da tarefa Estudar a Paridade

Seis alunos (três com a versão A e outros três com a versão C) usaram raciocínio dedutivo para responder à questão mas não concluíram se a função final era par ou ímpar. Outros três alunos, com a versão A, usaram também o raciocínio dedutivo e concluíram a sua resolução escrevendo ‘c.q.d. – como queríamos demonstrar’ (figura 15). Isto mostra que estes alunos não fazem distinção entre esta resolução e a anterior, uma vez que, neste caso, não sabíamos o que íamos obter e logo não há nada que quiséssemos demonstrar à partida.

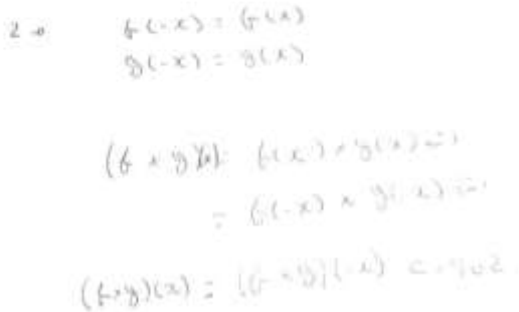


Figura 15. Dificuldade na questão 2 da tarefa Estudar a Paridade

Houve uma aluna com a versão B e um aluno com a versão C que tinham terminado a questão 1 mas não chegaram a responder à questão 2. Apenas dois alunos, um com a versão A e outro com a versão C, responderam de uma forma correta a esta questão, verificando analiticamente a paridade da função produto/diferença e concluindo se a expressão que obtiveram significa que esta função é par ou ímpar (figura 16).

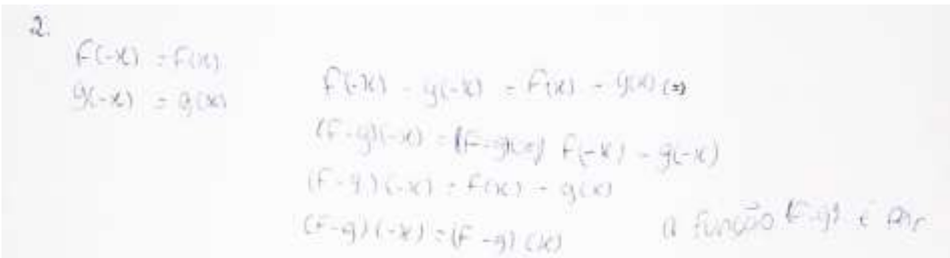


Figura 16. Resolução da questão 2 da tarefa Estudar a paridade

Apenas dois pares de alunos chegaram a dar resposta à terceira questão (um deles com a versão A e outro com a versão C). Um destes pares, estudou os casos em que as funções f e g são ambas pares e ambas ímpares mas não tirou conclusões sobre a expressão que obteve. O outro par estudou também o caso em que uma das funções é par e outra é ímpar. Um destes alunos escreveu ‘c.q.d – como queríamos demonstrar’’ no final de cada um destes casos (figura 17), mostrando mais uma vez que, para ele, qualquer prova matemática tem de acabar com esta indicação, mesmo que a prova seja usada como descoberta, numa questão para ‘investigar’ que é aberta e na qual não se conhecem as hipóteses inicias nem as conclusões a obter.

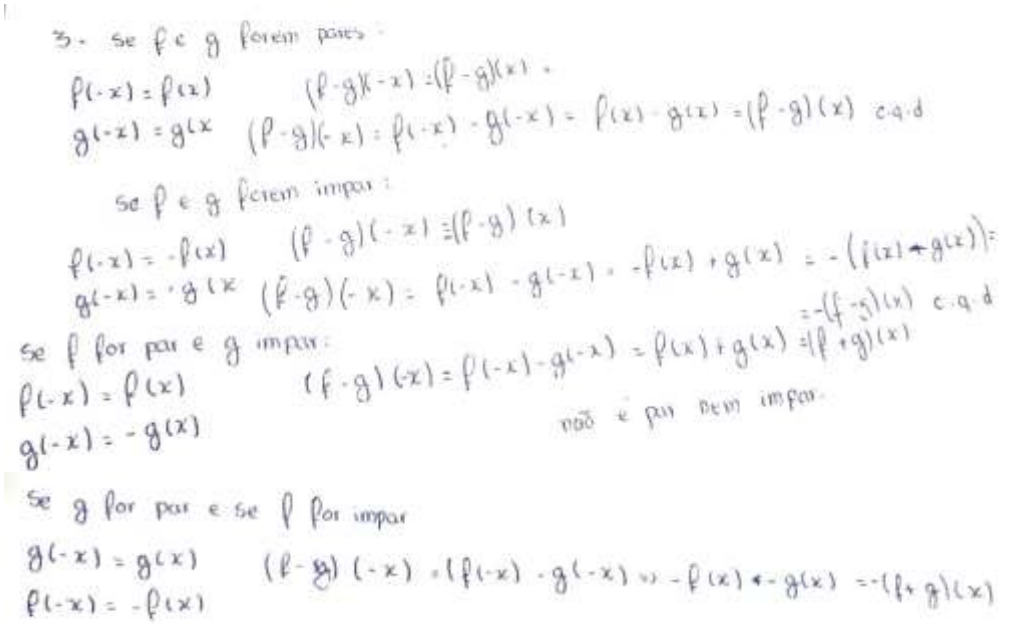

3. se f e g forem pares:
f(-x) = f(x)   (f-g)(-x) = (f-g)(x) .
g(-x) = g(x   (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) = (f-g)(x) c.q.d
se f e g forem impar:
f(-x) = -f(x)   (f-g)(-x) = (f-g)(x)
g(-x) = -g(x   (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) =
= -(f-g)(x) c.q.d
se f for par e g impar:
f(-x) = f(x)   (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)
g(-x) = -g(x)   não é par nem impar.
se g for par e se f for impar
g(-x) = g(x)   (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)
f(-x) = -f(x)

Figura 17. Resolução da questão 3 da tarefa Estudar a Paridade

Este par de alunos teve ainda tempo de resolver a questão 4, concluindo corretamente que se as funções f e g forem ambas pares ou ambas ímpares, a função quociente é par (figura 18) mas não chegaram a estudar o caso em que uma das funções é par e outra ímpar.

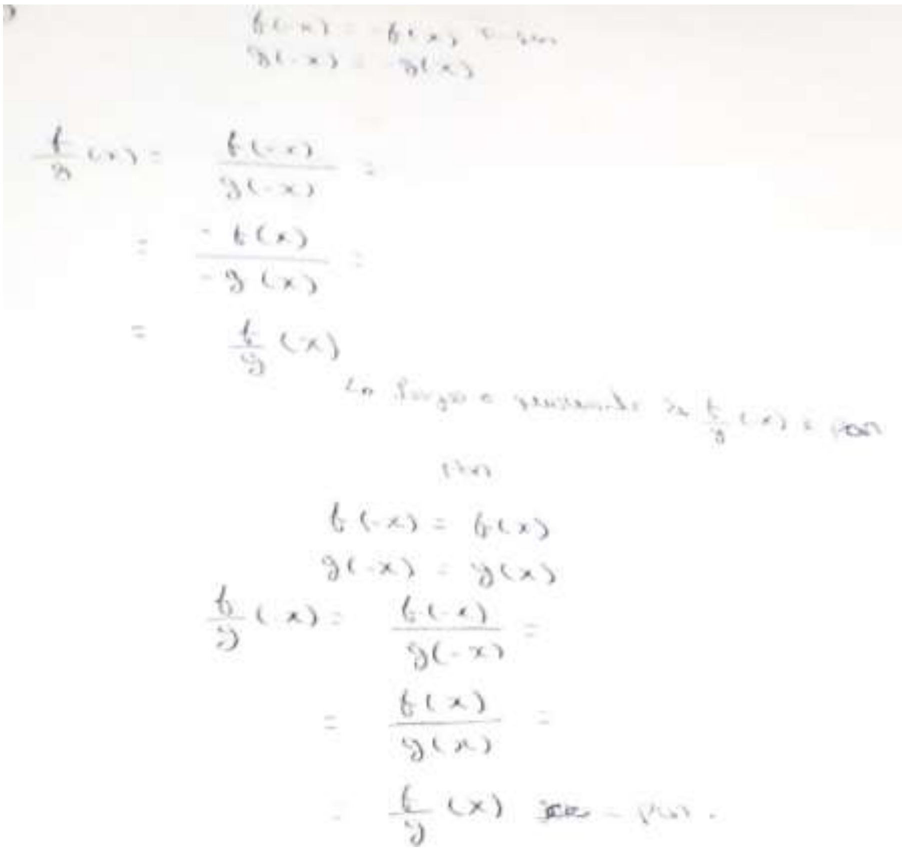


Figura 18. Resolução da questão 4 da tarefa Estudar a Paridade

Estes alunos resolveram toda a ficha de trabalho de modo autónomo, solicitando apenas a validação da sua argumentação a uma professora, logo ao início da resolução. Estes alunos são capazes de construir cadeias dedutivas formais e provas intelectuais nas quais usam definições algébricas (nomeadamente a definição de função par e ímpar) e princípios lógicos de equivalência entre expressões. Nesta tarefa, todos os alunos usaram provas intelectuais baseadas em propriedades genéricas. Estas provas foram usadas como verificação de uma proposição (na questão 1), uma vez que já sabiam o que queriam obter, e como explicação e descoberta (nas questões 2 e 3), já que a própria construção da prova é que permitiu chegar a uma conclusão sobre a paridade da função estudada.

Os alunos também produziram provas intelectuais na questão 1 da tarefa 'Algumas propriedades da composição de funções'. Houve 5 alunos que não conseguiram iniciar a resolução e 2 que só fizeram uma parte por não compreenderem a definição analítica de função crescente e decrescente nem saberem como abordar a questão. No entanto, todos os outros alunos da turma conseguiram resolver a questão (figura 19) estabelecendo hipóteses e produzindo provas matemáticas que tinham como objetivo descobrir o sentido de variação da função composta. Nesta tarefa, já nenhum aluno escreveu ‘c.q.d. – como queríamos demonstrar’ no final da prova, mostrando que compreenderam a natureza da questão que começa com ‘investiga…’. Destes, apenas um aluno produziu a cadeia dedutiva que o levaria à resposta mas não soube tirar conclusões sobre o que obteve, mostrando que ainda não domina bem a prova enquanto descoberta.

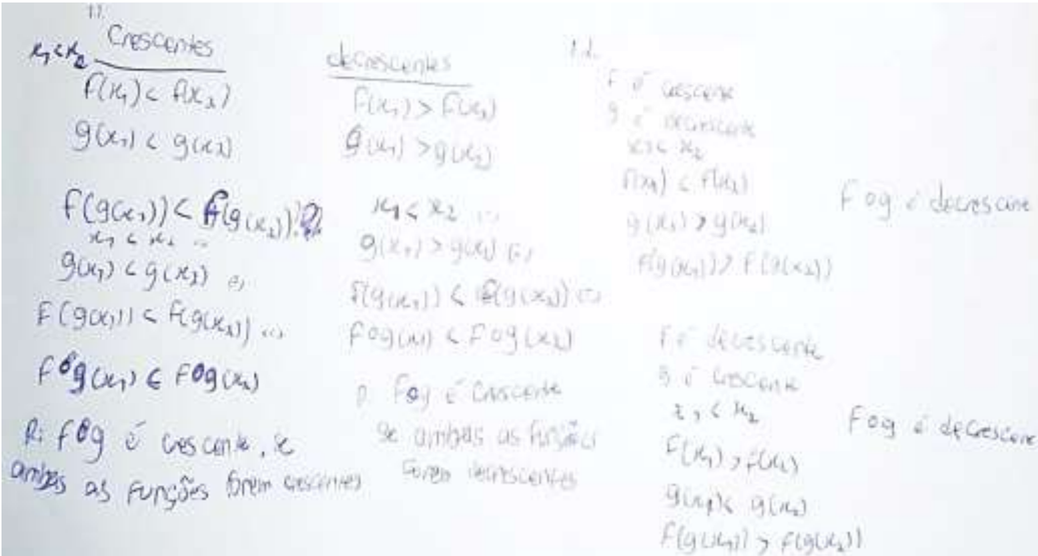


Figura 19. Resolução da questão 1 da tarefa Algumas propriedades da composição de funções

Analisei também se os alunos compreendem e usam provas por contraexemplo ou contra-recíproco. Na questão 2 da tarefa ‘Algumas propriedades da composição de funções’, os alunos são solicitados a justificar se a composição de funções reais de variável real goza da propriedade comutativa. Alguns alunos não chegaram a responder a esta questão por falta de tempo mas dos que responderam, cerca de metade usou corretamente a prova por contraexemplo (figura 20) argumentando que a composição não é comutativa.

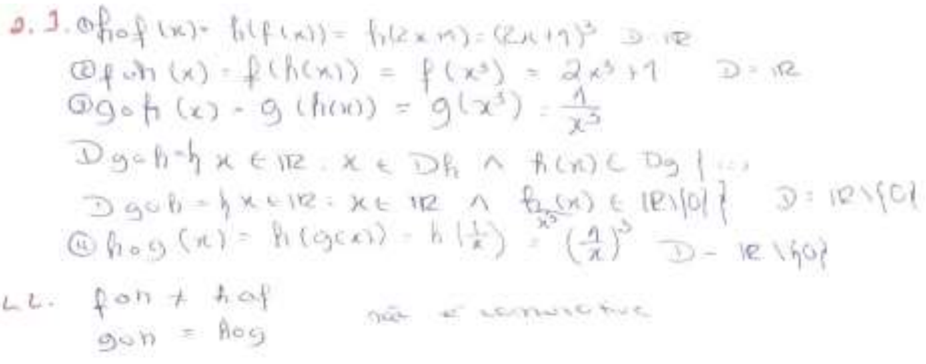


Figura 20. Resolução da questão 2 da tarefa Algumas propriedades da composição de funções

A outra metade dos alunos mostrou dificuldade em compreender que um contraexemplo é suficiente para provar que uma proposição é falsa e que, em matemática, não podemos classificar uma proposição como ‘nem sempre’ verdadeira (figura 21).

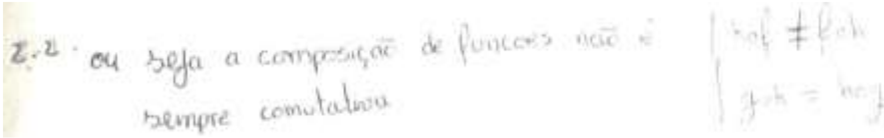


Figura 21. Resolução da questão 2.2 da tarefa Algumas propriedades da composição de funções

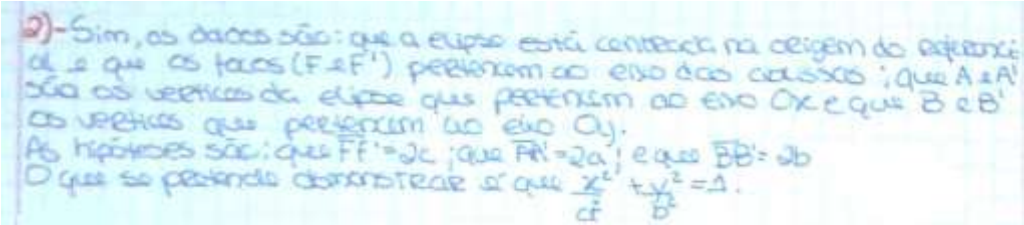
Demonstrações

A tarefa ‘As equações irracionais e a elipse’, que os alunos resolveram autonomamente como parte do relatório escrito individual, permitiu-me perceber a compreensão que os alunos tiveram sobre a demonstração apresentada. No guião do relatório era pedido aos alunos que fizessem uma apreciação inicial desta tarefa na qual deveriam identificar dados, hipóteses e teses no teorema apresentado e fazer uma reflexão sobre a compreensão geral que tiveram da demonstração, ao lê-la pela primeira vez. A grande maioria dos alunos identificou que o que se queria demonstrar era a equação reduzida da elipse mas não souberam separar os dados das hipóteses considerando como dados, todas as informações constantes do enunciado (figura 22).

> Sim, consigo. Pretende-se mostrar que a equação reduzida desta elipse é $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = 1$ através dos dados que nos disponibilizam acima. Não consigo identificar as hipóteses.

Figura 22. Parte da apreciação inicial do relatório escrito individual

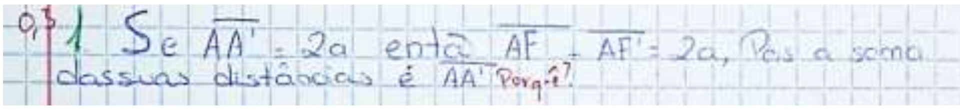
Apenas uma aluna tentou interpretar o enunciado do teorema de forma a separar o que é um dado e o que é uma hipótese (figura 23). Neste teorema, podemos considerar como dados o facto de a elipse estar centrada na origem e os seus focos pertenceram ao eixo *Ox*. Atribuir letras aos vértices e focos e definir variáveis para as medidas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{FF'}$ são hipóteses, uma vez que a equação reduzida podia ser encontrada modificando estes fatores e manter-se-iam as suas características formais. Apesar de a aluna não ter feito a separação corretamente, considero muito positivo que tenha feito um esforço no sentido de interpretar o enunciado do teorema e separá-lo.



2)- Sim, os dados são: que a elipse está centrada na origem do referencial e que os focos (F e F') pertencem ao eixo das abcissas; que A e A' são os vértices da elipse que pertencem ao eixo Ox e que B e B' os vértices que pertencem ao eixo Oy.
As hipóteses são: que $\overline{FF'} = 2c$; que $\overline{AA'} = 2a$; e que $\overline{BB'} = 2b$
O que se pretende demonstrar é que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Figura 23. Parte da apreciação inicial do relatório escrito individual

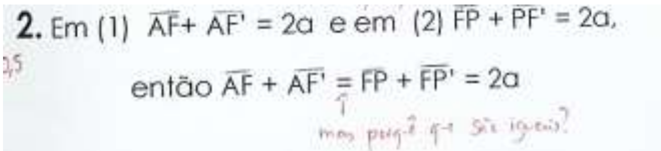
Nas primeiras 5 questões da tarefa 'As equações irracionais e a elipse', os alunos focam-se em elementos de compreensão local, nomeadamente a questão 1 e 3 solicitam aos alunos que expliquem o significado de termos ou afirmações. Como se pode ver pela classificação obtida pelos alunos nestas questões (ver Classificações – Anexo C), a maioria conseguiu justificar corretamente a sequência da demonstração, usando a linguagem natural. A dificuldade mais comum na questão 1 foi a não justificação de que $\overline{AF} = \overline{A'F'}$, talvez porque os alunos achassem esta igualdade demasiado trivial (figura 24). Vários alunos referiram esta questão como uma das que acharam mais difíceis e nas quais pensaram durante mais tempo.



0,3 1 Se $\overline{AA'} = 2a$ então $\overline{AF} + \overline{AF'} = 2a$, Pois a soma das suas distâncias é $\overline{AA'}$ Porquê?

Figura 24. Resolução da questão 1 da tarefa As equações irracionais e a elipse

Já nas questões 2, 4 e 5, os alunos justificaram algumas das afirmações presentes na sequência da demonstração. Mais uma vez a maioria dos erros são por omissão da justificação de um ou mais aspetos do passo em questão. Nomeadamente, na questão 2 houve 8 alunos que não referiram que *A* e *P* pertencem ambos à elipse e 5 não referiram que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos é constante. Na figura seguinte encontra-se o exemplo de uma aluna que não referiu nenhum destes aspetos mostrando que não compreendeu completamente qual a relação entre os passos (1) e (2) da demonstração. Diversos alunos referiram, também esta, como uma das questões em que sentiram mais dificuldades.



1,5
2. Em (1) $\overline{AF} + \overline{AF'} = 2a$ e em (2) $\overline{FP} + \overline{PF'} = 2a$,
então $\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{FP} + \overline{FP'} = 2a$
mas porquê q. são iguais?

Figura 25. Resolução incompleta da questão 2 da tarefa As equações irracionais e a elipse

A questão 6 solicita os alunos a fazer uma nova demonstração. A análise das resoluções permite perceber a compreensão holística que os alunos têm da demonstração apresentada no enunciado, já que usam um raciocínio dedutivo semelhante e também a compreensão local, pois os passos que têm mais dificuldade em reproduzir serão aqueles que compreenderam menos bem. Apenas 3 alunos não apresentaram qualquer resposta a esta questão e um aluno apresentou parte da demonstração com os passos de (1) a (11) mas depois não a concluiu. Houve 5 alunos que omitiram o passo (12) fazendo a substituição do valor de a^2 sem justificar que usaram o Teorema de Pitágoras aplicado a um determinado triângulo (figura 26).

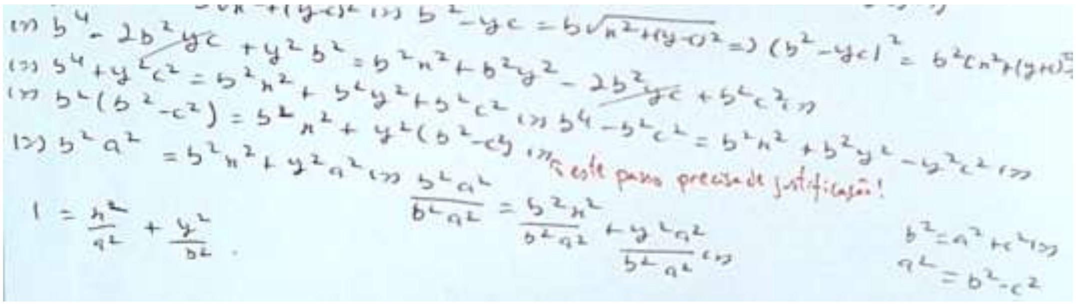
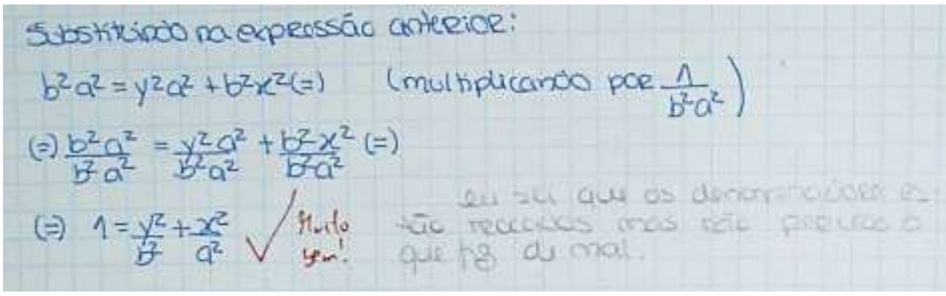


Figura 26. Parte de resolução da questão 6 da tarefa As equações irracionais e a elipse

O teorema que os alunos deveriam demonstrar tinha um erro no enunciado. Onde se lê, “a equação reduzida desta elipse é $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$” (Enunciado do Relatório Escrito Individual, p. 2 - Anexo C) deveria estar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Houve 5 alunos que chegaram ao resultado que estava no enunciado, alterando algum passo da demonstração para que as variáveis ficassem na posição que eles pensavam ser a correta. Na entrevista, um destes alunos referiu que “A parte da demonstração foi a parte em que eu fiquei muito tempo mesmo ali a pensar porquê que não dava certo e usei umas dez folhas para fazer aquilo e eu acho que nem deu certo no final” (entrevista ao aluno B). Convém salientar que, quando entreguei os relatórios expliquei o meu erro aos alunos e não penalizei aqueles que, devido à convicção externa na veracidade do enunciado, forçaram-se a obter a expressão que lá constava.

Outros 5 alunos completaram a demonstração corretamente, sendo que 3 deles escreveram um comentário a afirmar que, apesar de o seu resultado ser diferente do enunciado, não encontravam erros na sua resolução (figura 27). Isto mostra compreensão dos passos apresentados e confiança na própria argumentação ao ponto de questionar a veracidade do enunciado.



Substituindo na expressão anterior:

$b^2a^2 = y^2a^2 + b^2x^2 \Leftrightarrow$ (multiplicando por $\frac{1}{b^2a^2}$)

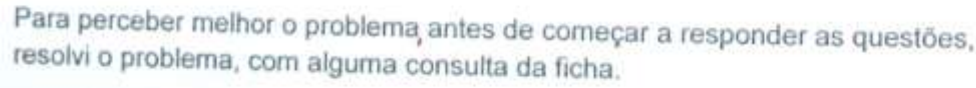
$\Leftrightarrow \frac{b^2a^2}{b^2a^2} = \frac{y^2a^2}{b^2a^2} + \frac{b^2x^2}{b^2a^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}$ ✓ Muito bem!

eu sei que os denominadores estão trocados mas não percebo o que fiz de mal.

Figura 27. Parte de resolução da questão 6 da tarefa As equações irracionais e a elipse

Um aluno referiu na sua apreciação final que, para se apropriar melhor da demonstração apresentada no enunciado, começou por tentar reproduzi-la, autonomamente (figura 28), em vez de se limitar a ler os passos já realizados. Isto revela preocupação em compreender a demonstração apresentada, antes de começar a resolver as questões da tarefa.



Para perceber melhor o problema, antes de começar a responder as questões, resolvi o problema, com alguma consulta da ficha.

Figura 28. Parte da apreciação final do relatório escrito individual

5.2 Conhecimentos usados na resolução das tarefas

Nesta secção analisei quais os conceitos e raciocínios, específicos do tema das funções do 11.º ano e de anos anteriores, que os alunos mobilizaram na resolução das tarefas dirigidas à argumentação. Em particular procuro analisar se os alunos recorrem a argumentos gráficos ou algébricos, verificando a sua capacidade de os interpretar e utilizar. Procuro perceber, igualmente, as conexões com outros temas matemáticos que os alunos estabeleceram ao responder a questões dirigidas à argumentação do tema das Funções. Vou ainda analisar como os alunos usam a calculadora gráfica para argumentar no tema das funções e se o fazem apenas quando o enunciado da tarefa o pede explicitamente ou se tomam a iniciativa de usar este recurso.

Domínio

Os alunos tiveram de usar, em diversas tarefas, conhecimentos sobre a noção de domínio de uma função e de domínio máximo de definição de uma expressão algébrica. Na questão 2 da tarefa 'Igualdade de Funções', vemos um exemplo da aplicação deste conhecimento, nomeadamente calcular, justificando, o domínio máximo de definição de duas funções racionais. Na figura 29 está o caso de uma aluna que determinou incorretamente o domínio da função g porque começou por simplificar a expressão e pensou no domínio, tendo em conta a expressão já simplificada e não a função original. Como os alunos já tinham trabalhado a simplificação de quocientes de polinómios do 1.º e 2.º grau na unidade de funções racionais e habitualmente indicavam em que conjunto a simplificação era válida, fiquei surpreendida por esta dificuldade ter surgido.

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad D_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

$$O\ domínio\ de\ cada\ uma\ das\ funções\ f\ e\ g\ \text{é}\ o\ mesmo.$$

Figura 29. Resposta incorreta à questão 2 da ficha Igualdade de Funções

Na figura seguinte, podemos ver que um aluno apresentou o domínio da função g, como sendo $\mathbb{R}\backslash\{-1\ e\ 1\}$, mostrando que não compreende bem a diferença entre a leitura do domínio em linguagem natural ‘R excepto –1 e 1” e a linguagem algébrica, em que os elementos de um conjunto escrito em extensão se separam por vírgulas ou ponto e vírgula.

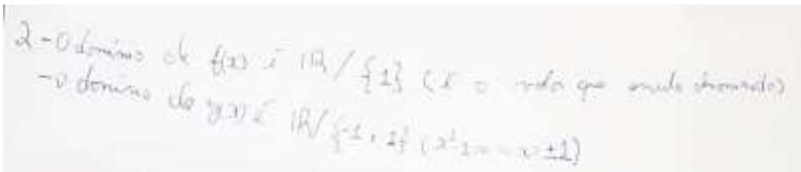


Figura 30. Resolução da questão 2 da tarefa Igualdade de funções

Na questão 4 da mesma ficha, um par de alunas tentou calcular a imagem de -1 pela função g (figura 31) obtendo uma fração com zero no denominador. Inicialmente consideraram que $\frac{0}{0} = 0$ mas perceberam o erro e classificaram a expressão como “impossível de resolver”. A noção de que o número 0 não tem inverso ou que não se pode ‘dividir’ por 0 vem já do 3.º ciclo do Ensino Básico e, no entanto há ainda alunos que se enganam e cometem este erro. Depois, as alunas concluíram que as funções não eram iguais mas assumiram que a função g teria uma assíntota para $x = -1$, apenas por não ter imagem nesse ponto. Esta dificuldade prende-se com o facto de os alunos desde o 10.º ano não trabalharem com representações gráficas de funções com pontos de acumulação da função que não pertencem ao domínio.

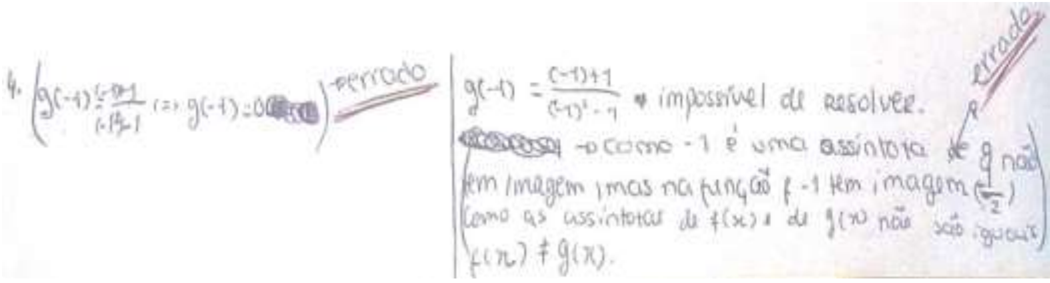


Figura 31. Erro na questão 4 da ficha Igualdade de Funções

Já na tarefa 46 da página 148 do manual, os alunos tiveram de determinar o domínio de definição da variável no contexto do problema, estabelecendo conexões com a Geometria ao usar o perímetro para estabelecer uma relação entre os valores do comprimento e da largura. Todos os alunos determinaram corretamente o intervalo de definição da variável *x*, sendo que a maioria dos alunos justificou tendo em conta a relação entre comprimento e largura e 3 alunos chegaram aos limites deste intervalo por tentativas (figura 32), adotando um esquema empírico de exploração.

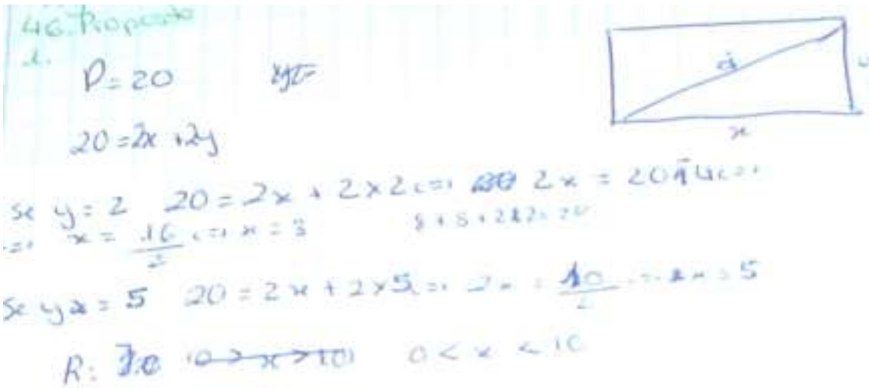


Figura 32. Resolução da questão 1 da tarefa 46 da pág. 148 do manual

Na segunda questão desta tarefa, os alunos tinham de escrever a medida da diagonal em função de *x*, combinando conhecimentos sobre expressão algébrica de funções, com a noção de diagonal de um polígono e a aplicação do teorema de Pitágoras, aprendidas no Ensino Básico. Nenhum dos alunos apresentou as duas soluções da equação de 2.º grau resolvida (positiva e negativa). Este erro é recorrente nesta turma e, apesar de nesta tarefa estarem a calcular um comprimento e a solução negativa não fazer sentido no contexto, noutras tarefas em que ambas as soluções seriam consideráveis, os alunos também tendem a esquecer a negativa. Além disso, verificam-se ainda algumas dificuldades na utilização dos casos notáveis da multiplicação, em que os alunos assumem que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ou que $(a -$

$b)^2 = (a+b)(a-b)$ (figura 33), confundindo o quadrado da diferença com a diferença de quadrados.

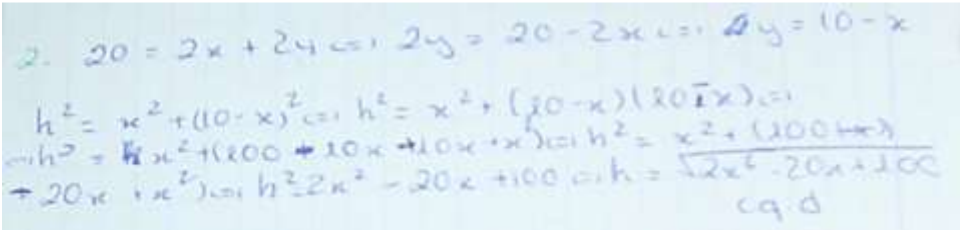


Figura 33. Resolução com erros da questão 2 da tarefa 46 da pág. 148

Ao responder à questão 3, os alunos eram solicitados a usar a calculadora gráfica para determinar entre que valores pode variar o comprimento da diagonal. Observei que muitos alunos não se lembravam das funcionalidades da calculadora gráfica, aprendidas no 10.º ano, necessárias para dar resposta a esta questão. Vários alunos, para encontrar o limite superior do intervalo, calcularam, com o auxílio da calculadora a imagem de 10 (figura 34), mostrando não compreender que a imagem de 0 podia ser superior à de 10 e que, por isso, deveriam ter calculado ambas as imagens. Além disso, diversos alunos apresentaram como resposta a esta questão um intervalo fechado, o que mostra que não articularam esta questão com a primeira da mesma tarefa em que constataram que o intervalo de definição da variável deveria ser aberto porque a mesma não pode tomar os valores 0 e 10.

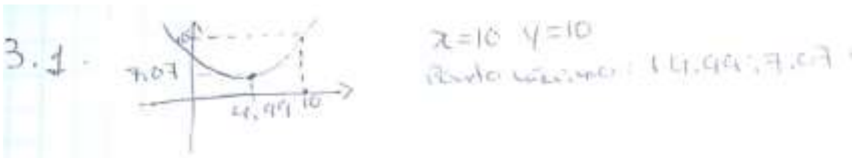
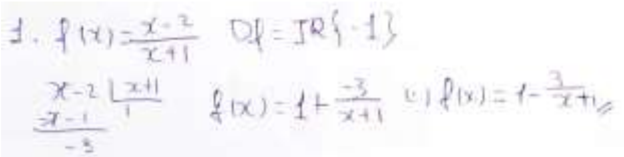


Figura 34. Resolução da questão 3 da tarefa 46 da pág. 148

Argumentos gráficos e algébricos

Na questão 1 da tarefa ‘Uma investigação sobre funções inversas’, os alunos tinham de mostrar que duas funções racionais eram iguais. Cerca de metade da turma mostrou algebricamente que as duas expressões eram equivalentes mas não justificou que os domínios eram iguais, levando-me a concluir que o conceito de igualdade de funções abordado algumas aulas antes, ainda não estava compreendido, nesta altura. A outra metade da turma construiu uma prova por exibição em que apresentaram os cálculos e afirmações necessárias para mostrar o que se pretendia, sem os articular (figura 35). Os alunos mobilizaram conhecimentos sobre: simplificação de expressões algébricas, que já conhecem do Ensino Básico; divisão de polinómios, aprendida no 10.º ano; e cálculo de domínios de funções racionais, abordada no 11.º ano, num tópico anterior ao estudo.


1. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$x-2 \mid x+1$; $-x-1$; 1; -3 $f(x) = 1 + \frac{-3}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \frac{3}{x+1}$

Figura 35. Resolução da questão 1 da tarefa Uma investigação sobre funções inversas

Um par de alunas construiu também uma prova por exibição, mas utilizando argumentos gráficos, como se pode ver na figura 36. Estas alunas recorreram corretamente à calculadora gráfica para desenhar os gráficos das duas funções e verificar que coincidiam. Isto mostra que compreendem que podem usar este recurso como apoio à sua argumentação e que justificando que os domínios são iguais, o facto de os gráficos coincidirem é condição suficiente para que as funções sejam iguais.

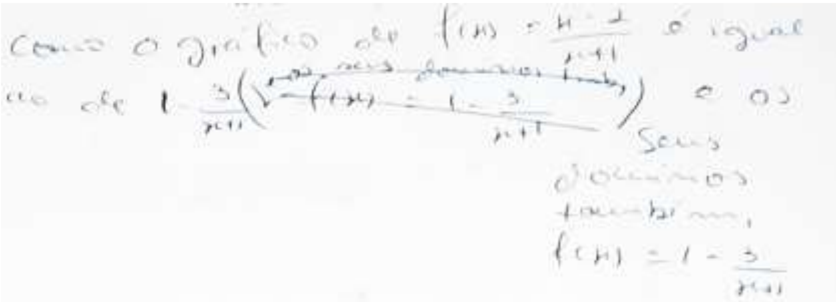

Como o gráfico de $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ é igual ao de $1 - \frac{3}{x+1}$ (~~e os seus domínios, f(x) = 1 − 3/(x+1)~~) e os seus domínios também, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+1}$

Figura 36. Resolução da questão 1 da tarefa Uma investigação sobre funções inversas

Ao resolver as questões 2 e 5 desta tarefa, os alunos mobilizaram adequadamente conhecimentos sobre pontos de interseção com os eixos coordenados, assíntotas e contradomínio de funções racionais, sendo que, metade da turma recorreu ao auxílio da calculadora gráfica. A outra metade determinou os pontos de interseção analiticamente e determinou o contradomínio e assíntotas usando o que aprenderam sobre funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$ (figura 37).

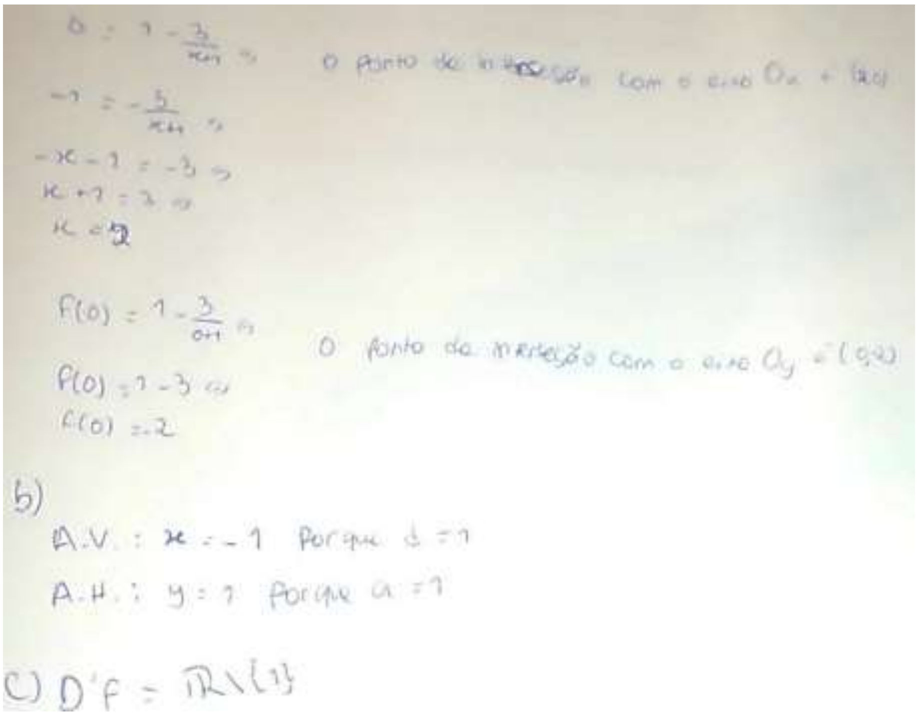


Figura 37. Resolução da questão 2 da tarefa Uma investigação sobre funções inversas

Pude observar, ao circular pelos pares durante o trabalho autónomo, que muitos alunos não se recordavam dos conceitos aprendidos no 10.º ano e, em particular, confundiam a interseção com o eixo *Oy* e *Ox*, como se pode ver na figura 38. Esta tarefa contribuiu assim para relembrar alguns conceitos sobre funções que estavam já esquecidos.

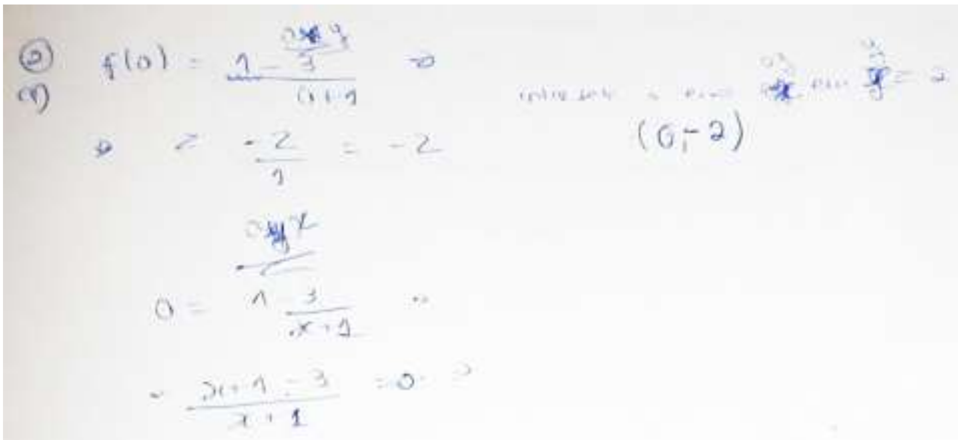


Figura 38. Dificuldades na questão da tarefa Uma investigação sobre funções inversas

Representações gráficas

Na tarefa ‘Igualdade de Funções’, os alunos foram solicitados a representar graficamente duas funções. Nenhum aluno desenhou o gráfico de *g* corretamente, sem ajuda de uma das professoras. A discussão da questão 5 da ficha de trabalho

‘Igualdade de Funções’ foi uma oportunidade de discutir com os alunos algumas limitações da calculadora gráfica.

> Professora – Quem experimentou pôr a função g na máquina o que é que obteve?
>
> Aluno1 – As duas iguais.
>
> Professora – Porque é que nós obtemos na máquina as duas iguais?
>
> Aluno 2 - Por causa da janela?
>
> Professora – Não, não tem a ver com a janela. (…) Qual é que é a única diferença que nós descobrimos entre estas duas funções?
>
> Aluno 2 – A assíntota.
>
> Aluno 3 [simultaneamente] – O domínio.
>
> Professora – A assíntota é a mesma, por isso é que a máquina as desenha iguais. (…) Existir aqui este ‘excepto -1’ faz simplesmente com que haja um buraquinho no gráfico. Vocês, o ano passado, viram algumas funções que tinham aqui uma bola aberta num determinado sítio, lembram-se?
>
> Vários alunos – Sim.
>
> Aluno 1 – Não era contínua…
>
> Professora – Exatamente! Por isso é que máquina desenha a função como se fosse exatamente igual. A máquina não sabe fazer estas bolas abertas.
>
> Aluno 4 – É como nas assíntotas.
>
> Professora – Exatamente! Algumas máquinas desenham as assíntotas como uma linha contínua.

Apoiados na convicção externa de que calculadora reproduz sempre o gráfico de uma função corretamente, todos os alunos consideraram erradamente que os gráficos das funções f e g eram iguais. Isto mostra que os alunos não foram críticos quanto aos gráficos apresentados pela calculadora, apesar de terem calculado os domínios das funções e saberem que são diferentes. Nesta discussão, os alunos tiveram de mobilizar conhecimentos sobre domínios, assíntotas e gráficos de funções racionais de forma a poder fazer a correta representação gráfica das funções dadas e uma aluna relacionou a ideia da interrupção do domínio da função g com uma descontinuidade da função, relembrando o conceito intuitivo de continuidade aprendido no 10.º ano, que ajudou o resto da turma a compreender o gráfico desta função.

Na questão 6 da tarefa ‘As equações irracionais e a elipse’, sugeria-se que os alunos elaborassem um esquema da situação descrita no teorema que se queria provar. Os alunos interpretaram os dados do enunciado do teorema corretamente e conseguiram desenhar a representação gráfica da situação, sendo que os erros mais comuns foram não nomear os eixos e não indicar as coordenadas dos pontos relevantes, como se pode observar no exemplo da figura 39. Em entrevista, uma aluna referiu que este esquema foi útil na resolução desta questão porque "Ajudou para perceber que não era 2a, mas no entanto 2b" (entrevista à aluna A).

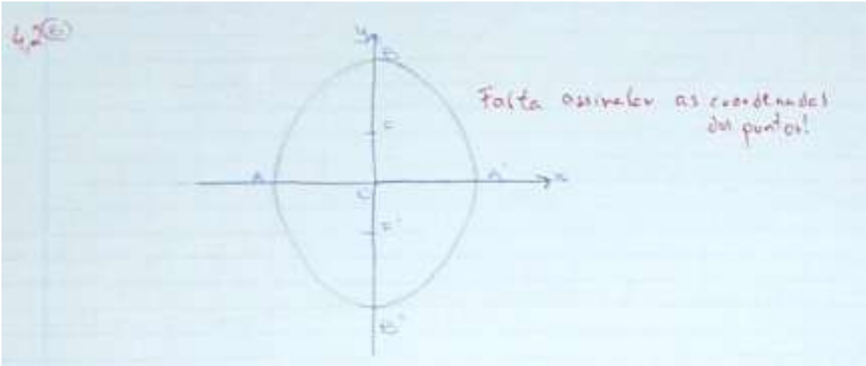


Figura 39. Esquema da questão 6 da tarefa As equações irracionais e a elipse

Contextos reais

Em tarefas de contexto real, os alunos têm de usar a capacidade de interpretação do enunciado para poderem argumentar matematicamente e para reconhecerem que conhecimentos matemáticos devem mobilizar. Na figura 40, está uma resolução da primeira questão da tarefa 26 do manual (anexo B), onde uma aluna resumiu os dados do enunciado, calculou as imagens de 6 por cada uma das funções, indicando qual a que correspondia à máquina A e B e interpretou estes resultados no contexto do problema. Apenas um par de alunos não conseguiu interpretar corretamente os dados do enunciado indiciando que, no geral, os alunos conseguem justificar as suas respostas relacionando conceitos matemáticos com contextos reais.

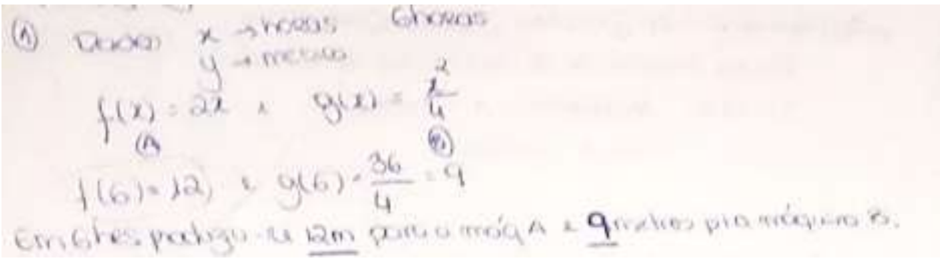


Figura 40. Resolução da questão 1 da tarefa 26

A relação entre contexto real e conhecimentos matemáticos na argumentação está também presente na tarefa 'Composição de funções', particularmente na questão 2.2, em que os alunos são solicitados a justificar que o lucro obtido no pavilhão Arina, em função do número de bilhetes vendido, é dado pela expressão apresentada. Houve 4 alunos que optaram por justificar usando um esquema. Destes, apenas um fez uma justificação completa (figura 41), já que os outros não justificaram a condição $n \in \mathbb{N}$.

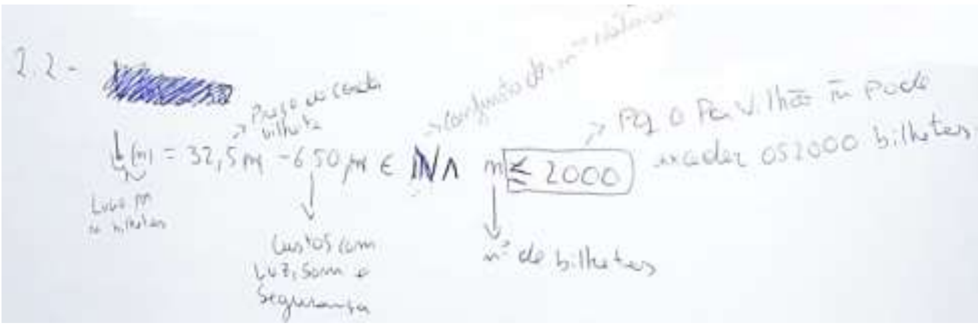


Figura 41. Resolução da questão 2.2 da tarefa Composição de Funções

Os restantes justificaram corretamente a expressão apresentada, usando a linguagem natural mas cerca de metade também não sentiu necessidade de justificar o facto de o número de bilhetes ser um número natural. Os alunos tiveram de mobilizar conhecimentos sobre expressões algébricas de funções e domínio de definição de uma variável em contexto real, que são conceitos aprendidos no Ensino Básico, para produzir esta justificação.

Na resolução da questão 2 tarefa 32 da página 125 do manual, os alunos tiveram de mobilizar conhecimentos sobre Geometria, nomeadamente a desigualdade triangular e o teorema de Pitágoras (figura 42), combinados com conhecimentos sobre funções com radicais e resolução de equações interpretados no contexto real do enunciado. Todos os alunos conseguiram dar resposta às questões desta tarefa havendo apenas dois casos em que, na questão 2.2.3 apresentaram apenas os cálculos sem interpretar o resultado no contexto. Interpreto isto mais como um esquecimento do que como uma dificuldade, uma vez que questionados durante a discussão, estes alunos souberam responder corretamente. Os alunos foram solicitados a usar a calculadora gráfica na questão 2.2.2 e todos souberam tirar partido deste recurso para responder à questão e usar o gráfico e pontos relevantes obtidos, como justificação (figura 42).

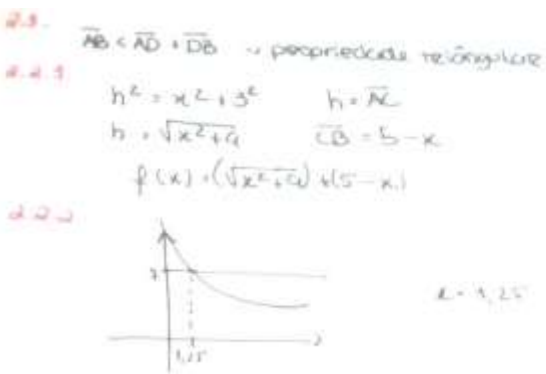


Figura 42. Resolução de algumas questões da tarefa 32 da pág. 125 do manual

Algumas das dificuldades dos alunos ao resolver tarefas dirigidas à argumentação, prendem-se com a manipulação de definições algébricas. Por exemplo, na tarefa 'Algumas propriedades da composição de funções', 3 alunos apresentaram a resposta com erros e outros expressaram, oralmente, dificuldade em manipular a definição algébrica de função crescente e decrescente. Estas definições foram abordadas no 10.º ano, mas na prática os alunos só estudavam a monotonia de funções baseados em características gráficas. Na figura 43 podemos ver um destes casos em que uma aluna assumiu que $f\big(g(x_1)\big) > f(g(x_2))$ porque $f(x_1) > f(x_2)$, não compreendendo que os objetos neste caso são $g(x_1)$ e $g(x_2)$ que não mantêm a ordem de x_1 e x_2.

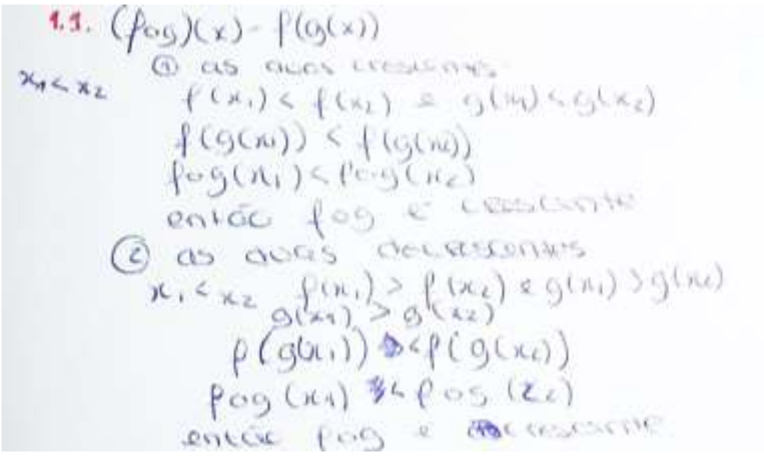


Figura 43. Resolução da questão 1 da tarefa Algumas propriedades da composição de funções

Na discussão desta tarefa, foram superadas algumas destas dificuldades, visto que na resolução da questão 1.2 a maioria da turma já participava de forma ativa respondendo às questões colocadas e usando as definições algébricas de função crescente e decrescente corretamente.

Professora – Vamos ver o caso contrário! Se o f for decrescente e o g for crescente. Portanto x_1 menor que x_2. f de x_1 é maior ou menor?

[Escrito no quadro: $x_1 < x_2$

$f(x_1)$ ___ $f(x_2)$]

Aluno1 – Maior.

Professora – Porque agora o f é decrescente. E o g de x_1…

Aluno 2 – Menor!

Professora – Menor que g de x_2. Então eu aqui quero aplicar-lhe o f.

[Escrito no quadro: $x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

$g(x_1) < g(x_2)$

$f(g(x_1))$ ___ $f(g(x_2))$]

Professora [apontando para as duas primeiras afirmações] – Daqui para aqui alterou?

Vários alunos – Sim!

Professora [apontando para as duas afirmações seguintes] – Então daqui para aqui…

Vários alunos – Também vai alterar.

Professora – Vamos lá ver o que é que aconteceu neste caso. Partimos de um ‘menor’ e chegámos a um ‘maior’. [A função composta] é crescente ou decrescente?

Aluno 2 – Chegou a um ‘maior’ é decrescente.

Outra evidência de que esta discussão proporcionou aprendizagens significativas, foi o facto de uma aluna que não tinha conseguido resolver nenhuma parte da questão, ao tirar apontamentos sobre a discussão, ter acrescentado à resolução escrita no quadro os seus comentários e interpretações sobre a definição algébrica de função crescente e decrescente (figura 44).

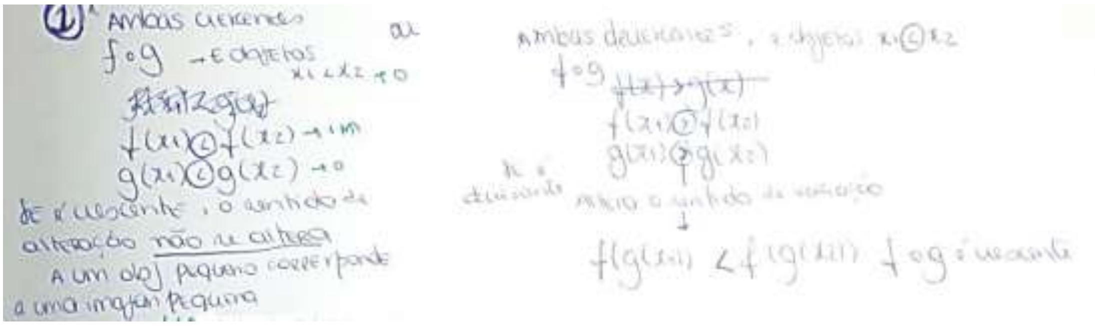


Figura 44. Resolução da questão 1 da tarefa Algumas propriedades da composição de funções

Aprendizagens realizadas durante a intervenção letiva

Durante a entrevista, questionei os alunos sobre as aprendizagens realizadas durante a intervenção, relacionadas com as funções. Todos os alunos referiram imediatamente a função inversa, mostrando que este conceito foi significativo para eles e falaram também das operações com funções, onde destacaram a função composta. Apesar do último tópico abordado na intervenção incluir as funções e as equações com radicais, que foram o tema do relatório, os alunos só referiram esta aprendizagem quando questionados diretamente. Penso que isto se deve ao facto de este tópico ser muito similar às equações e funções que os alunos já conheciam e resolviam no 10.º ano.

No prolongamento da tarefa 102 da página 11 do manual, os alunos justificaram que a correspondência inversa da função dada no enunciado, também é uma função. Depois, tiveram de mobilizar conhecimentos sobre objeto, imagem e escrita da expressão algébrica de uma função para definir esta correspondência como função e, usando as noções de função composta, funções permutáveis, função identidade e funções inversas uma da outra, aprendidas em aulas anteriores, concluíram que a função obtida era inversa da inicial. Apesar disto, houve algumas dificuldades da parte dos alunos em usar este processo para encontrar a expressão da inversa de uma função, em tarefas dirigidas à argumentação. Na questão 3 da tarefa ‘Uma investigação sobre funções inversas’, dois alunos obtiveram uma expressão incorreta por assumirem que deveriam simplesmente trocar as variáveis de lugar (figura 45), em vez de resolver a expressão em ordem à variável dependente.

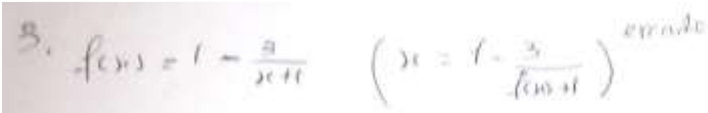


Figura 45. Resolução com erros da questão 3 da tarefa Uma investigação sobre funções inversas

Na tarefa ‘As equações irracionais e a elipse’ os alunos também tiveram de mobilizar aprendizagens realizadas durante a intervenção letiva, nomeadamente sobre equações irracionais. As questões 4 e 5 desta tarefa levaram os alunos a usar também argumentos geométricos. Na questão 4, a grande maioria dos alunos da turma, não conseguiu apresentar uma justificação para $\overline{FB} = a$, limitando-se a afirmar esta igualdade ou omitindo este passo de todo (figura 46). Todos os alunos argumentaram corretamente que o triângulo $[OBF]$ é retângulo porque o ângulo $B\hat{O}F$ é reto, mas apesar disso houve vários alunos que não justificaram que a medida da hipotenusa é a (figura 45), talvez por acharem esta afirmação trivial.

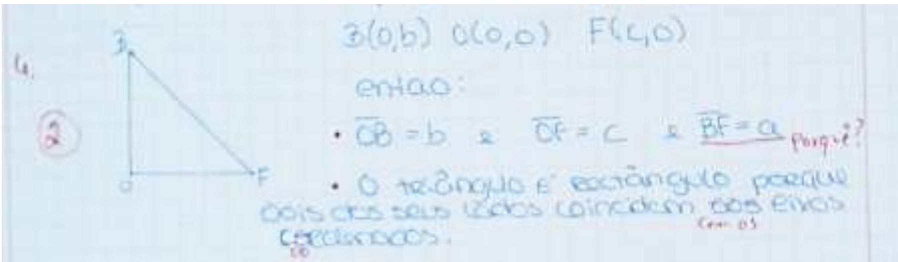


Figura 46. Resolução incompleta da questão 4 da tarefa As equações irracionais e a elipse

Só uma aluna conseguiu responder a esta questão de forma completa e correta, usando argumentos geométricos baseados no esquema do enunciado e mobilizando conhecimentos sobre a definição de elipse e sobre triângulos retângulos (figura 47).

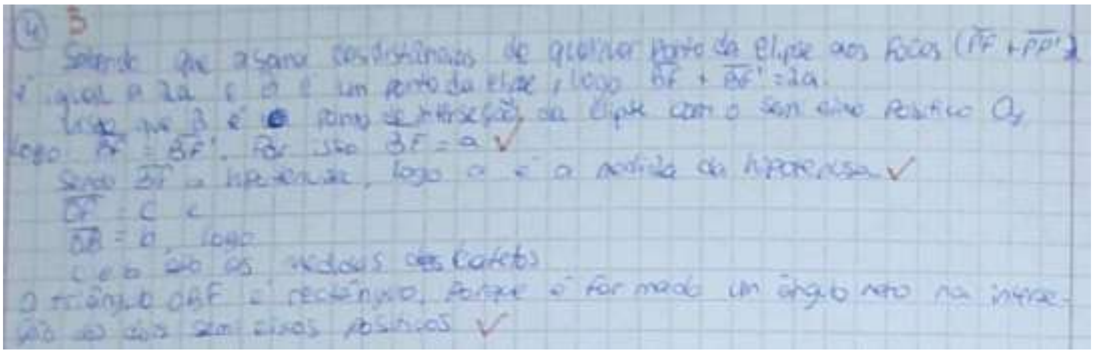


Figura 47. Resolução da questão 4 da tarefa As equações irracionais e a elipse

É de referir que nenhum aluno da turma obteve classificação máxima na questão 5 desta tarefa porque não referiram que sendo $a^2b^2 \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da equação por esta expressão. Na observação das aulas observei outras situações em que os alunos dividem ambos os membros de uma equação por uma expressão da qual não conhecem o valor. Este é, portanto, um erro recorrente que ainda deve ser salientado e esclarecido, junto dos alunos.

Na questão 6 da tarefa, apenas 3 alunos usaram o sinal de equivalência onde deveriam ter usado o sinal de implicação, evidenciando que a maioria dos alunos compreende o seu significado e a sua aplicabilidade na resolução de equações com radicais. No entanto há alunos que ainda cometem alguns erros relacionados com a compreensão do conceito de equação, tais como ‘perder’ um dos membros da equação ou escrever uma cadeia de igualdades a meio de uma cadeia de equivalências, como se pode ver na figura abaixo.

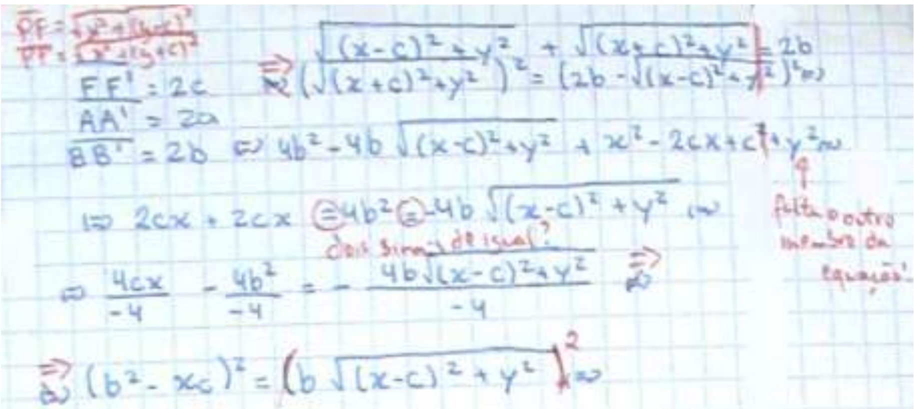


Figura 48. Dificuldades na resolução de equações com radicais

Na apreciação final do relatório, a principal aprendizagem referida pelos alunos foi o conceito de elipse, uma vez que os alunos não conheciam esta forma geométrica. Apenas alguns deles referiram que uma forma elíptica é “uma forma geométrica meio arredondada” (gravação áudio das aulas). Esta foi uma aprendizagem significativa para os alunos, uma vez que, na entrevista, os três alunos apontaram esta aprendizagem e souberam definir corretamente o que é uma elipse, usando linguagem natural. Na figura seguinte vemos o exemplo de um aluno que, ao resolver a tarefa ‘As equações irracionais e a elipse’, ficou com a impressão de que a elipse é “um lugar geométrico muito complexo”. Esta impressão podia ser atenuada com uma questão sobre elipses de caráter mais prático, no final do relatório.

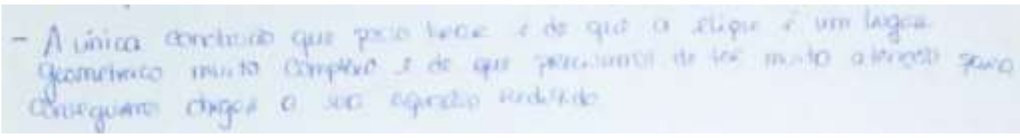


Figura 49. Parte da apreciação final do relatório escrito individual

Outra aluna salientou a aprendizagem sobre a forma de desenhar corretamente uma elipse presente no vídeo que foi visionado aquando da apresentação do relatório (figura 50).

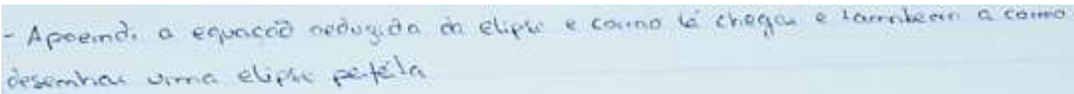

- Aprendi a equação reduzida da elipse e como lá chegar e também a como desenhar uma elipse perfeita

Figura 50. Parte da apreciação final do relatório escrito individual

Houve ainda 3 alunos que referiram, com a resolução do relatório, ter aprendido mais sobre a resolução de equações irracionais (figura 51). E, durante a entrevista, uma aluna referiu que “aprendi aquilo que demos na aula depois, que foi termos de fazer duas vezes o implica, para extrair duas raízes. Como já tínhamos feito isso no relatório… pronto, foi muito mais fácil na aula entender e fazer os exercícios, porque já sabia pelo relatório” (excerto da entrevista à aluna A).

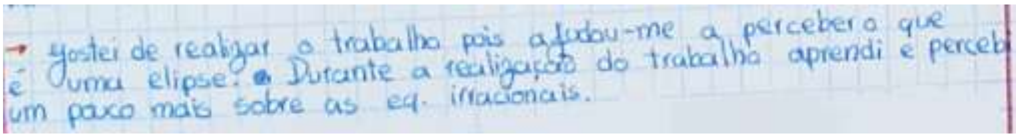

- Gostei de realizar o trabalho pois ajudou-me a perceber o que é uma elipse. Durante a realização do trabalho aprendi e percebi um pouco mais sobre as eq. irracionais.

Figura 51. Parte da apreciação final do relatório escrito individual

5.3 O trabalho realizado na unidade de ensino e a argumentação

Seguidamente irei focar-me nos aspetos relativos ao formalismo, em particular o rigor matemático e a linguagem simbólica desenvolvidos pelos alunos e na evolução que estes aspetos sofreram, no decorrer da unidade de ensino. Procurei evidenciar situações em que os alunos são capazes de distinguir uma implicação de uma equivalência e usar corretamente simbologia matemática na sua argumentação. Vou também analisar se os alunos utilizam corretamente a linguagem e simbologia própria do tema das funções nas suas argumentações, tanto por escrito, como nas discussões em grande-grupo, ao longo da intervenção letiva.

Uso de termos matemáticos

Na questão 1 da ficha de trabalho 'Igualdade de funções' (Anexo B), os alunos calcularam as imagens por f e g de três objetos diferentes. Apesar de todos os alunos usarem corretamente a expressão $f(a) = b$ para designar que b é a imagem de a por f, alguns deles ainda têm dificuldade em distinguir os conceitos objeto e imagem, como se pode ver no exemplo da figura 56.

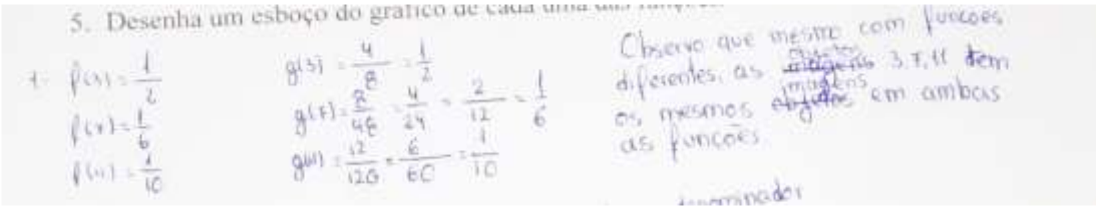


Figura 52. Resolução da questão 1 da ficha Igualdade de Funções

Outro exemplo do uso incorreto de termos matemáticos é o da figura 57 em que um aluno, ao responder à questão 1 da tarefa 'Algumas propriedades da composição de funções', concluiu que "quando as duas são decrescentes então as funções ficam crescentes", quando na verdade se estava a referir à função composta.

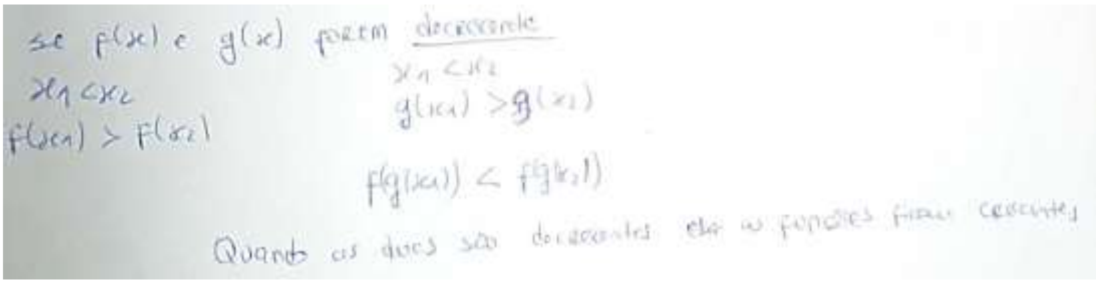


Figura 53. Resolução da questão 1 da tarefa Algumas propriedades da composição de funções

Ao observar a interação entre pares na resolução das tarefas, diversos alunos se referiram à função composta como 'o fog e o gof' ou 'aquela da bolinha' (notas de campo) e, também na entrevista, dois dos alunos se referiram a esta operação como "aquela que é uma após a outra" (entrevista aos alunos A e B), o que mostra que os alunos têm dificuldade em usar o termo adequado. No entanto, outros termos como 'função identidade', ou 'lugar geométrico' (gravação áudio das aulas) foram desde logo adotados pelos alunos no seu discurso e usados corretamente em situações posteriores.

Oralidade

Na oralidade, os alunos tinham, no início da intervenção, alguma falta de rigor, nomeadamente ao referir-se ao conjunto dos números reais, uma grande parte dos alunos pronuncia ‘I R’, assumindo que o símbolo ℝ é formado por duas letras e não uma letra que se desenha de uma forma distinta para o seu significado ser universal. Este equívoco nunca aconteceu com o conjunto ℕ, apesar de o símbolo dos números naturais também ter uma barra inicial que poderia eventualmente ser confundida com a letra I. Este erro foi sempre corrigido nas discussões e nas interações professor-aluno, sendo menos recorrente ao longo da intervenção, o que mostra que o rigor matemático da oralidade sofreu uma melhoria.

Abaixo, encontra-se a transcrição de um excerto da discussão sobre a ficha de trabalho ‘Estudar a Paridade’, retirada das gravações áudio das aulas, onde podemos ver que os alunos compreenderam bem a ideia de que, num ‘mostra que…’ temos já dadas a hipótese e a tese e só queremos explicar porquê que esta é verdadeira, enquanto num ‘verifica se...’, conhecemos hipóteses mas não sabemos qual a conclusão que podemos tirar destas.

> Professora [referindo-se à questão 2] – Nós, ontem, tínhamos visto, já no final, qual era a diferença principal entre esta pergunta e a outra pergunta, lembram-se?
>
> Aluno1 – Não tem o fim.
>
> Aluno 2 [em simultâneo] – Não tem onde queremos chegar.

Ao discutir o exemplo de resolução da questão 2 presente na ficha ‘Síntese de Ideias da Ficha de Trabalho’ (anexo E), no qual se concluía que a função produto era par, perguntei aos alunos: “se fosse ímpar o que deveríamos obter?” e os alunos souberam responder, indicando a expressão correta $(f \times g)(-x)$, mostrando compreender as definições algébricas de função par e ímpar. Quando questionados sobre “o que distingue a questão 3 da ficha?”, responderam prontamente que “também não há hipóteses” (retirado de gravação áudio das aulas). Assim, os alunos evidenciaram que aprenderam com a tarefa e posterior discussão diversas estratégias e raciocínios associados a esquemas dedutivos de prova.

Durante a entrevista realizada no final da intervenção, a propósito da questão número 6 do guião (Anexo D), dois dos três alunos entrevistados, lembravam-se desta aula como exemplo de aprendizagens relacionadas com justificações e demonstrações. No excerto que se segue, podemos ver que a aluna A refere a diferença entre resolver uma questão do tipo ‘mostre que…’ e do tipo ‘verifica se…’.

> Aluna A [acerca da ficha Estudar a Paridade]: Lembro-me de falarmos no ‘mostre que’… Eu lembro-me que isso era das funções pares e ímpares e do cálculo das operações entre funções. E estava ‘mostre que’, por exemplo, ‘a função f e g são pares, dá uma par’. Ponto, nesse caso tínhamos de… Já sabíamos que ia dar

mesmo par. Enquanto no ‘verifica’ tínhamos de fazer as duas formas, se fosse par ou ímpar, para ver se ia dar par ou ímpar, para verificar.

Entrevistadora: Portanto a diferença principal é que numa nós já sabemos onde vamos dar…

Aluna A: … e noutra não temos a certeza!

Já o aluno B salientou a diferença entre uma questão do tipo ‘mostre que…’ e ‘investiga…’, explicando o processo de formulação de hipóteses. Nenhum destes alunos pertencia ao par que revolveu a ficha na íntegra, o que mostra que houve aprendizagens significativas com a discussão coletiva.

Entrevistadora: Qual é a diferença entre o ‘mostre que…’ e o’ investiga…’?

Aluno B: Bem, o ‘mostre que’ nós temos de chegar mesmo naquilo. Agora o ‘investigar’ nós temos que, por exemplo, dar exemplos. Acho que nessa parte era do par e do ímpar… Nós tínhamos de fazer um exemplo com par e depois um exemplo com ímpar. E depois juntar as duas ideias.

Entrevistadora: Portanto tínhamos que colocar hipóteses.

Aluno B: Sim, hipóteses! Se for ímpar acontece não sei o quê e se for par acontece outra coisa.

A maioria dos alunos consegue identificar se uma dada correspondência é ou não uma função, mas tem dificuldades em enunciar a definição de função, usando expressões como “cada imagem só tem um objeto”, “os objetos só têm uma imagem” ou “não pode haver duas” (gravação áudio das aulas). Outra definição que é problemática para alguns alunos é a de injetividade. A maioria dos alunos consegue facilmente identificar uma função injetiva se esta estiver representada graficamente, mas têm dificuldades em enunciar a definição, tanto algebricamente como em linguagem natural, usando expressões como “tem uma e uma só imagem”, “as mesmas imagens não podem existir” ou “corresponde só a um objeto” (gravações áudio das aulas).

Quando ocorreram situações destas, houve sempre alunos que, por saberem enunciar de forma correta as definições, corrigiam os colegas, ajudando-os a perceber o que estavam a dizer mal. Na discussão da questão 6 da tarefa ‘Uma investigação sobre funções inversas’, um aluno conjeturou que os gráficos da função original e da sua inversa eram “simétricos sobre a reta $y=x$” e logo um colega o corrigiu dizendo “simétricos em relação à reta”. Isto mostra que os alunos também detetam as faltas de formalismo ou rigor dos colegas e os ajudam a ultrapassá-las.

Escrita simbólica

Na tarefa ‘Estudar a paridade’, apenas um par de alunas começou por tentar particularizar para melhor compreender o problema mas, em vez de escolher uma função particular, tentaram escolher um objeto particular (figura 54) e não conseguiram prosseguir, abandonando rapidamente esta estratégia. Depois tiveram algumas dificuldades na escrita simbólica das operações com funções, escrevendo $(-f \times -g)(x)$ quando queriam escrever $-f(x) \times (-g(x))$. Uma das professoras chamou-lhes a atenção para a diferença entre as duas expressões e as alunas corrigiram a sua escrita.

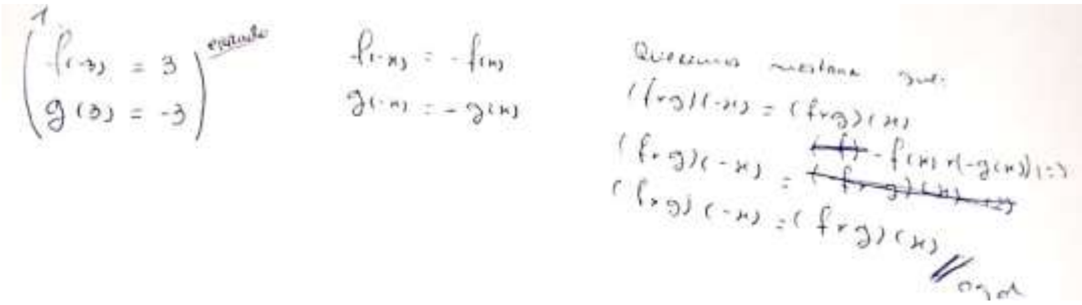


Figura 54. Resolução da questão 1 da ficha Estudar a Paridade

No que diz respeito à utilização de símbolos lógicos (como igualdade, equivalência, implicação, quantificadores, entre outros), os alunos mostraram em geral compreender o significado dos mesmos, apesar de nem sempre os utilizarem corretamente. Ao fazer a síntese das aprendizagens geradas pela tarefa ‘Igualdade de funções’ e escrever a definição de igualdade de funções, os alunos mostraram ter percebido este conceito e souberam responder imediatamente o que simbolizava o quantificador universal, apesar de não o utilizarem muito frequentemente.

> Professora: Conclusão: eu só posso dizer que duas funções são iguais se elas tiverem a mesma expressão ou expressões equivalentes, ou seja, se derem origem às mesmas imagens e também…
>
> Vários alunos: Se tiverem o mesmo domínio!
>
> (…)
>
> Professora [ditando a definição de igualdade de funções]: Duas funções f e g dizem-se iguais se domínio de f é igual ao domínio de g e…
>
> [Escrito no quadro: Igualdade de funções:
>
> Duas funções f e g, dizem-se iguais se: $D_f = D_g$ e ∀**]**
>
> Professora: Este símbolo significa? [apontando para ∀]
>
> Vários alunos: Qualquer!
>
> Professora: Qualquer que seja x pertencente ao domínio de f (…)

Alguns alunos desta turma mantiveram, ao longo da unidade de ensino, alguma dificuldade em diferenciar os sinais de igual e de equivalente. Como se pode observar no exemplo da figura 55, esta aluna usa sinais de equivalente e setas entre expressões que considera derivarem umas das outras. Além disso a sua resolução é confusa, não se percebendo bem o que são as hipóteses iniciais e onde começa a resposta à questão 2 da ficha Estudar a Paridade (anexo B).

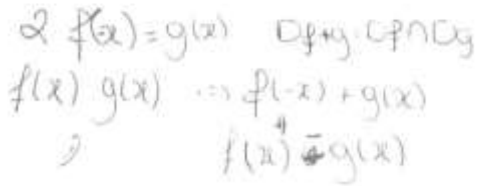


Figura 55. Dificuldades na questão 2 da tarefa Estudar a Paridade

Outro exemplo é o da figura abaixo, referente à tarefa 122 da página 121 do manual. Pode-se observar que o aluno usa sinais de equivalente, quando deveria usar sinais de igual, uma vez que se trata de uma cadeia de expressões iguais e não de equações equivalentes.

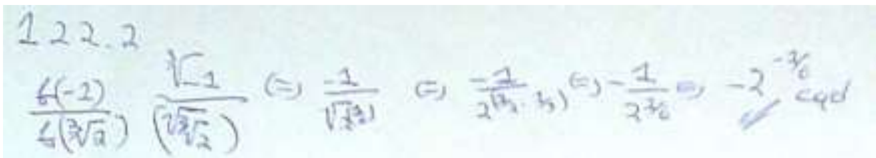


Figura 56. Resolução com erros da tarefa 122 da pág. 121

Alguns alunos tinham, no início da unidade de ensino, dificuldade em compreender o papel do símbolo de igual numa equação. Na figura 57 podemos ver o exemplo de uma aluna que, ao responder à questão 3 da tarefa ‘Uma investigação sobre funções inversas’, apresentou bastantes dificuldades em resolver a equação em ordem a *x*, havendo passos da resolução em que o sinal de igual desaparece. Esta aluna mostra não compreender que, sem o sinal de igual, deixamos de estar perante uma equação. Há também passos em que se sucedem igualdades, o que me leva a concluir que a aluna também não distingue entre uma cadeia de expressões iguais e uma cadeia de equações equivalentes. Houve alunos que melhoraram este aspeto ao longo da intervenção, mas alguns continuam a apresentar dificuldade na utilização destes símbolos.

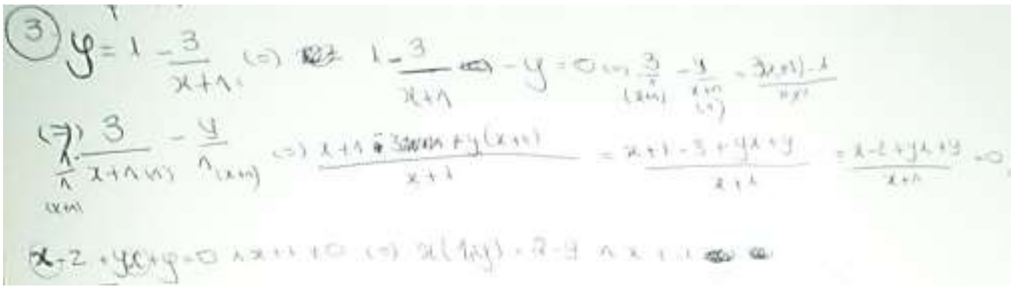


Figura 57. Dificuldades na resolução da tarefa Uma investigação sobre funções inversas

A tarefa 32 da página 125 do manual tem como objetivo levar os alunos a compreender o significado do símbolo ‘implica’ e a sua utilização no contexto da resolução de equações com radicais. Na questão 1, os alunos têm de argumentar acerca da veracidade de duas implicações recíprocas. Todos os alunos responderam corretamente à questão 1, apesar das justificações apresentadas serem de cariz diferente. Para justificar que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, dois terços da turma optou por justificar em linguagem natural que ‘se a e b são o mesmo número, o seu quadrado não pode ser diferente’ (figura 58). Este argumento é quase uma demonstração por absurdo, o que mostra que os alunos conseguem argumentar supondo o contrário do que querem provar e concluindo que essa hipótese não faz sentido.

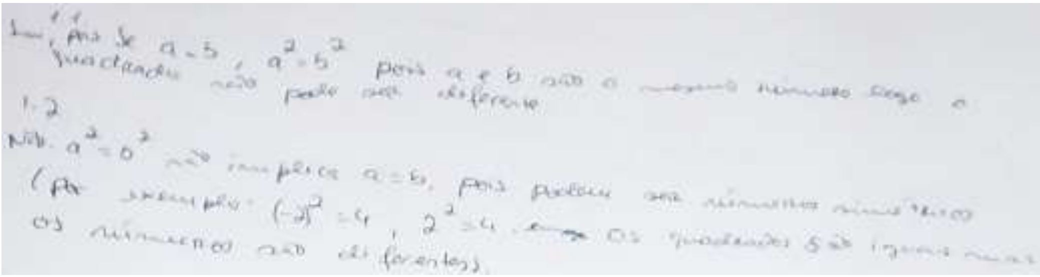


Figura 58. Resolução da questão 1 da tarefa 32 da pág. 125 do manual

Os restantes alunos da turma apresentaram apenas um exemplo particular usando-o como exemplo genérico como o que está apresentado na figura 59. Nesta resolução podemos ver também o exemplo da justificação que 4 alunos deram na questão 1.2, afirmando que, como a implicação da questão 1.1 era verdadeira e o sinal de implica "só aponta para um lado", a implicação recíproca não podia ser também verdadeira. Esta dificuldade foi esclarecida na discussão em grande-grupo na qual expliquei aos alunos que o sinal de equivalente não é mais do que a conjunção de dois sinais de implica com direções opostas, ao que os alunos responderam com expressões de espanto como "agora já faz sentido" ou "afinal não é um igual com coisas à volta" (gravação áudio das aulas).

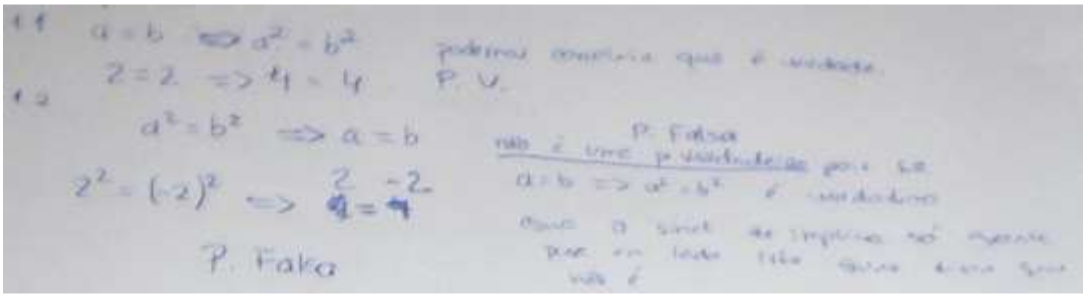


Figura 59. Resolução com erros da questão 1 da tarefa 32 da pág. 125 do manual

De facto, na entrevista, os três alunos referiram esta diferenciação como uma aprendizagem relacionada com justificações e demonstrações, mostrando que esta foi uma aprendizagem à qual atribuíram significado e importância. A aluna A foi uma das alunas que respondeu com um argumento como o da figura 59 e é interessante verificar que a aluna sublinhou o facto de, numa implicação, o consequente "nem sempre" implicar o antecedente, mostrando que superou a dificuldade de achar que esta situação não poderia ocorrer de todo:

> (…) aquele símbolo do verifica. Não é verifica… Implica! (…) O implica quer dizer que a primeira vai dar a segunda mas a segunda nem sempre dá a primeira. Enquanto no equivalente a primeira é igual à segunda e a segunda é igual à primeira. (Aluna A)

Já o aluno B estabeleceu uma comparação com a Físico-Química relacionando as equivalências e implicações com reações químicas em que, respetivamente, se pode, ou não pode, recuperar os reagentes a partir dos produtos.

> O equivalente, por exemplo nós passamos de uma parte para outra e podemos fazer isso vice-versa. Podemos passar de uma parte para outra, não sei como se fala.. Não sei se é comutativo… (…) Agora no implica não, nós vamos sempre numa direção. Eu acho que posso relacionar com a Físico-Química: os reagentes dão os produtos e vice-versa, alguns. Outros não podemos voltar dos produtos para os reagentes. (Aluno B)

Por outro lado, o aluno C focou-se na aplicação destes símbolos à resolução de equações afirmando que devemos usar o símbolo de equivalente quando a transformação que fizermos não alterar as soluções da equação e usamos o sinal de implica caso contrário: "O equivalente continua o mesmo raciocínio, não sei. O implica vai alterar algo na função que estamos a resolver".

Ainda na questão 1.2 da tarefa 32, 9 alunos produziram uma prova por contraexemplo, apresentando um caso particular em que $a^2 = b^2$ mas $a \neq b$. É interessante verificar que os próprios alunos usam simbologia para expressar as suas ideias, pois como podemos ver na figura 60, vários alunos usaram corretamente o símbolo $\nRightarrow$ para exprimir 'não implica' sem nunca terem visto este símbolo antes. Isto mostra que os alunos vão-se apropriando da linguagem matemática e adotaram naturalmente a mesma simbologia que já viram nos símbolos de diferente $\neq$ ou não pertence $\notin$. Os restantes alunos justificaram usando linguagem natural e afirmando que "$a^2 = b^2$ não implica $a = b$ porque a e b podem ser números simétricos. Esta justificação está correta mas é menos explícita e mais longa do que apresentar um contraexemplo.

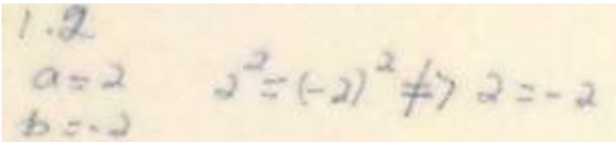


Figura 60. Resolução da questão 1.2 da tarefa 32 da pág. 125 do manual

Uma aluna produziu uma prova intelectual para descobrir a resposta que deveria dar a esta questão. Como se pode observar na figura 61, esta aluna analisou os casos possíveis em que $a^2 = b^2$, considerando $a.a = b.b$; $(-a)(-a) = (-b)(-b)$ e $(-a)(-a) = b.b$ e concluiu que, neste último caso $-a \neq b$. Na verdade deveria ter concluído que $-a = b$ donde $a \neq b$. Podemos concluir da análise feita sobre as resoluções desta tarefa que os alunos tiveram uma grande preocupação em argumentar matematicamente, de forma a justificar a sua resposta. Esta tarefa foi realizada na última aula da intervenção letiva e mostra uma evolução em relação às primeiras tarefas em que os alunos não sabiam como justificar e mostravam dificuldades em conjeturar e testar as suas conjeturas.

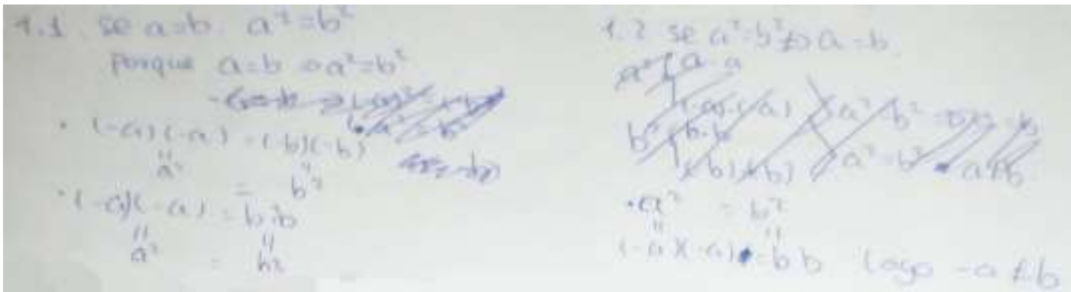


Figura 61. Resolução da questão 1 da tarefa 32 da pág. 125 do manual

Apreciação dos alunos pela argumentação matemática

Durante as entrevistas aos alunos, procurei perceber como o trabalho em sala de aula contribuiu para a importância e utilidade que os alunos atribuem à argumentação matemática e, em particular, às demonstrações. Todos os alunos afirmaram que é importante justificar e apresentaram três razões essenciais para o fazer: (1) mostrar ao professor ou a quem vai ler a justificação, qual o raciocínio usado, ou seja, é uma questão de comunicação e explicação; (2) confirmar se o resultado obtido está correto, ou seja, verificar a veracidade do resultado; e (3) compreender aquilo que se está a justificar, ou seja, uma perspectiva de exploração e descoberta.

> Aluna A: Sim, é importante, porque há várias formas de chegar à solução de um problema e convém mostrarmos o nosso raciocínio. (…) Eu normalmente justifico, porque faz parte do… Sei lá, do meu feitio. Gosto que esteja tudo especificado para as pessoas perceberem como é que eu lá cheguei e, quem sabe, dará mais alguns pontos!
>
> Aluno B: Justifico para ver se os passos estão todos certos e para confirmar que é mesmo aquele o resultado.
>
> Aluno C: É sempre bom justificar porque demonstra que sei os raciocínios. Se chegar ao resultado final sem perceber não há de valer de nada.

Dois dos alunos entrevistados afirmam que usam essencialmente cálculos para argumentar matematicamente e o terceiro afirma argumentar “ou com esquemas ou com cálculos, mas também podemos justificar por palavras” (entrevista ao aluno C). A aluna A faz uma distinção clara entre o que considera uma demonstração e uma justificação, mostrando que os alunos reconhecem que existem diferentes níveis de formalização na argumentação matemática.

> Aluna A: Demonstrações é o ‘mostre que’ e justificar é termos um problema e termos de justificar através dos nossos cálculos, ou palavras, ou desenhos e pelo nosso raciocínio, o porquê da resposta a que chegámos.
>
> Entrevistadora: Então um ‘mostre que’ já não pode ser por palavras nem por desenhos, é isso?
>
> Aluna A: Eu acho que, poder, pode. Mas é muito mais fácil irmos pela forma analítica.

Em relação ao uso de particularizações, o aluno B afirma que “eu acho que depende das pessoas (…) Quando a gente está a fazer a demonstração eu acho que me dou melhor quando está com números porque com as letras nos confundimos muito (…) se fosse com números iria ser muito mais fácil” (entrevista ao aluno B), mostrando que dá uma grande importância à utilização de casos particulares, como forma de explorar e compreender o problema, antes de fazer uma argumentação algébrica. Já a aluna A, afirma categoricamente que “Que eu me lembre acho que nunca fiz nenhum exemplo, começo logo analiticamente!” (entrevista à aluna A).

O aluno C define demonstração como “um esquema com números”, mostrando uma preferência pela argumentação baseada em casos particulares e o aluno B exemplifica o que entende como demonstração: “Como naquele trabalho da elipse. (…) A demonstração vai ser os passos que temos de fazer todos para chegar àquela conclusão, por exemplo naquele trabalho foi a equação reduzida da elipse” (entrevista ao aluno B). Quanto à compreensão geral desta demonstração aquando da primeira leitura, as opiniões dos alunos dividiram-se. Houve 4 alunos que, no relatório escrito, afirmaram ter tido muitas dificuldades a compreender a demonstração apresentada por considerarem ser muito complexa. Na figura 62, podemos ver o exemplo de um aluno que confessa não ter percebido os raciocínios subjacentes à demonstração e não saber o que fazer para iniciar a tarefa. Em entrevista, este aluno afirmou que “parecia tudo uma baralhada de ideias que não dava para perceber nada, mas depois lendo foi mais fácil perceber o porquê de aquilo estar daquela forma” (entrevista ao aluno C).

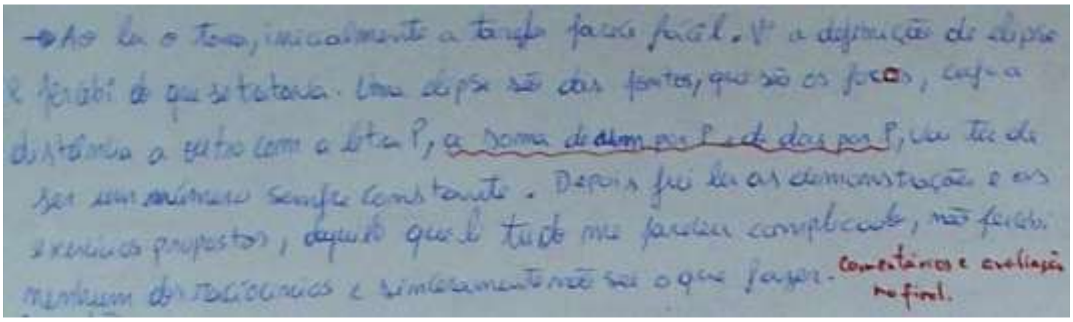

→ Ao ler o texto, inicialmente a tarefa parecia fácil. Vi a definição de elipse e percebi do que se tratava. Uma elipse são dois pontos, que são os focos, cuja a distância a esse ponto com a letra P, a soma da distância por P e dos por P, tem de ser um número sempre constante. Depois fui ler as demonstrações e os exercícios propostos, daquilo que li tudo me pareceu complicado, não percebi nenhum dos raciocínios e sinceramente não sei o que fazer.
Comentários e avaliação no final.

Figura 62. Apreciação inicial do relatório escrito individual

Outros 5 alunos afirmaram ter compreendido apenas parte da demonstração (figura 63) e os restantes referiram compreender a demonstração toda, salientando alguns passos que acharam mais complexos. Isto mostra que os alunos são capazes de avaliar a compreensão que têm de uma demonstração e diferenciar os passos que perceberam ou não.

Ao ler a demonstração pela a 1º vez, consegui perceber alguns passos sendo eles: 1), 3), 7), e o 12). Houve alguns em que só percebi metade como no 13) e 14). O 5), 6), 8), 10) e o 11), tive dificuldade, pois alguns tinham o "elevando ambos os membros ao quadrado".

Figura 63. Parte da apreciação inicial do relatório escrito individual

Na apreciação final do relatório, os alunos salientaram as aprendizagens realizadas durante a realização da tarefa 'As equações irracionais e a elipse' e avaliaram até que ponto a resposta às questões contribuiu para a compreensão da demonstração apresentada. Todos os alunos afirmam ter ficado a perceber melhor certos passos da demonstração que não tinham compreendido inicialmente (figura 64).

Ao responder às questões respeitantes a demonstração, fiquei a perceber melhor porque assim focamos mais em cada passo e assim é muito mais fácil resolver as questões e entender cada passo da demonstração.

Figura 64. Parte da apreciação final do relatório escrito individual

Mesmo os alunos com mais dificuldades afirmam que realizaram algumas aprendizagens e identificaram os passos que acharam mais fáceis e mais difíceis (figura 65).

Conclusão

→ Por um lado gostei de realizar esta tarefa porque aprendi mais acerca da elipse e pensar muito. Por outro lado não gostei porque não foi um relatório que me fez [illegible] Muitas das questões resolvidas deixei quase em branco [illegible] completa a tarefa. Muitas das questões [illegible] da demonstração. Durante a realização da tarefa foi não ter entendido o facto da demonstração, quanto à definição de elipse e fui-me apercebendo da complicação de cada questão. De algum modo eu percebi algumas das etapas. A questão número 7 foi o mais fácil. [illegible] não as entendo, por isso acho que não fiquei esclarecido quanto às etapas da demonstração, mas a maioria das etapas da demonstração.

Figura 65. Apreciação final do relatório escrito individual

Posso concluir assim que a análise local de uma demonstração ajuda os alunos a compreendê-la e a serem capazes de usar as ideias subjacentes à mesma para poderem construir outras demonstrações semelhantes. Inclusive, em entrevista, um aluno afirmou que "quando nós já vimos demonstrações noutros exercícios é mais fácil elaborarmos as outras" (entrevista ao aluno B). Os alunos da turma consideram que esta tarefa ajudou a melhorar o seu raciocínio (figura 66), mostrando que compreendem que uma demonstração envolve um tipo de raciocínio dedutivo que é de uma natureza diferente do raciocínio indutivo que usaram noutro tipo de tarefas.

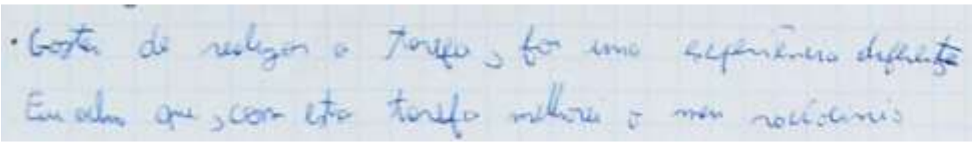

•Gostei de realizar a tarefa, foi uma experiência diferente
Eu acho que, com esta tarefa melhorei o meu raciocínio

Figura 66. Parte da apreciação final do relatório escrito individual

Além disso, alunos entrevistados afirmaram que esta tarefa, apesar de ter um nível de dificuldade elevado, os ajudou a compreender melhor as tarefas realizadas em aulas posteriores sobre equações irracionais.

> Os outros podiam nem ser fáceis antes, mas com esse exercício difícil, como já fizemos algo em que exercitámos mais o cérebro do que nos outros e puxámos mais pela cabeça, é muito mais fácil depois fazer os outros! (Aluna A)

> Tinha bastantes quadrados e depois dos quadrados tínhamos de fazer mais quadrados. Depois as outras foi muito mais fácil! [Referindo-se à relação entre a tarefa ‘As equações irracionais e a elipse’ e as tarefas sobre equações irracionais realizadas em aulas posteriores] (Aluno C)

6. Conclusões do estudo

Este estudo foi desenvolvido no âmbito da prática de ensino supervisionada que realizei e que integrou a lecionação de quinze aulas de 50 minutos, no 2.º período do ano letivo 2013/14, nas subunidades Operações com Funções, Função Inversa e Funções com Radicais, da unidade temática Funções, da disciplina de Matemática A, no 11.º ano de escolaridade, numa turma da Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão. O objetivo do estudo é analisar a argumentação matemática dos alunos do 11.º ano do Ensino Secundário na resolução de tarefas dirigidas à argumentação, no âmbito de uma unidade de ensino sobre Funções. Para isso formulei um conjunto de questões orientadoras do estudo, às quais tentei dar resposta:

- Quais os processos argumentativos que os alunos privilegiam (justificação, prova ou demonstração) na resolução de tarefas dirigidas à argumentação? Que dificuldades evidenciam na utilização desses processos?
- Quais os conhecimentos prévios a que os alunos recorrem na resolução de tarefas dirigidas à argumentação, ao longo da unidade de ensino? Que dificuldades evidenciam na mobilização desses conhecimentos?
- De que modo o trabalho realizado na unidade de ensino e, em particular, a resolução de tarefas dirigidas à argumentação contribuiu para os alunos desenvolverem uma argumentação mais formal?

Realizei uma revisão de literatura focada na argumentação matemática, no raciocínio e na compreensão e construção de provas e demonstrações por parte dos alunos. Também revi documentos curriculares, assim como estudos teóricos e empíricos sobre o ensino e aprendizagem das funções no Ensino Secundário, explicitando o modo como a argumentação pode ser desenvolvida neste tema matemático.

Adotei uma estratégia de ensino-aprendizagem exploratória, com recurso a diversos tipos de tarefas mas com maior ênfase nas tarefas de investigação e nos problemas. A maioria das tarefas propostas era dirigida à argumentação matemática, solicitando justificações, provas ou demonstrações aos alunos.

Os dados foram recolhidos através de observação direta, recolha documental das produções escritas dos alunos, gravação áudio das aulas lecionadas e entrevista semiestruturada a três alunos da turma. Analisei estes dados, com o propósito de dar resposta às questões de estudo, apresentando exemplos ilustrativos das aprendizagens, dificuldades e estratégias de argumentação apresentadas pelos alunos.

Neste capítulo resumo as conclusões do estudo, tentando dar resposta às questões formuladas e comparo os resultados obtidos com os de estudos empíricos apresentados na revisão de literatura.

6.1 Resposta às questões do estudo

Quais os processos argumentativos que os alunos privilegiam (justificação, prova ou demonstração) na resolução de tarefas dirigidas à argumentação? Que dificuldades evidenciam na utilização desses processos?

É evidente, pela análise apresentada, que os alunos procuram argumentar matematicamente e justificar as suas resoluções sempre que isto lhes é pedido explicitamente e, no final da intervenção, já o fazem mesmo em algumas situações em que esta indicação não está presente. No entanto, o tipo de argumentação que utilizam depende do que é pedido na tarefa e do próprio aluno, uma vez que há alunos que já dominam o raciocínio dedutivo e a construção de provas intelectuais (Balacheff, 2000) e outros ainda se baseiam em casos particulares ou em justificações em linguagem natural.

Quando solicitados a formular conjeturas, os alunos baseiam-se por vezes na sua intuição (Harel & Sowder, 2007), não sabendo como testar a sua validade. Neste estudo, verificou-se também a situação inversa, em que os alunos usam o raciocínio dedutivo ou exploram casos particulares corretamente mas depois não arriscam uma conjetura por não estarem certos da sua validade. A prova por contraexemplo (Harel & Sowder, 2007) foi usada autonomamente por alguns alunos, mas outros só começaram a produzir este tipo de provas depois de alguns exemplos da sua aplicação já terem sido discutidos. Ainda assim, os alunos só usam este processo quando conseguem encontrar mentalmente um contraexemplo adequado, sendo raros os casos em que os alunos testam a conjetura para uma seleção suficientemente abrangente de casos, antes de tirarem conclusões (Mason et al., 1982).

Outra conclusão do meu estudo é que os alunos têm dificuldade em justificar afirmações que lhes pareçam óbvias, por acharem a justificação desnecessária. Esta constatação vem confirmar os estudos empíricos de Harel & Sowder (2007) sobre a compreensão dos alunos acerca das demonstrações matemáticas. Por outro lado, os alunos não tiveram dificuldades em produzir provas por exibição (Balacheff, 2000), talvez por estarem habituados a este tipo de cadeia dedutiva que já usam desde o Ensino Básico em tarefas que pedem para mostrar uma igualdade entre duas expressões, funções ou quantidades. A maioria dos alunos mostrou dificuldade em compreender provas por contra-recíproco (Harel & Sowder, 2007), o que se pode dever ao facto de ser um tipo de prova muito pouco usado e discutido ao nível do Ensino Secundário.

Uma dificuldade que se verificou em mais do que uma situação foi a identificação de dados, hipóteses e teses no enunciado de uma tarefa (Mason et al, 1982). Especialmente nas tarefas em que se pretendem provar propriedades ou teoremas, esta dificuldade pode impedir os alunos de conseguir começar a prova e a não terem uma total compreensão da situação em estudo. Não obstante estas dificuldades, ao longo da análise dos dados, identifiquei diversos exemplos de tarefas em que os alunos produziram provas intelectuais (Balacheff, 2000), muitas delas com um nível de formalismo muito próximo da demonstração. Os alunos usaram duas formas de provar igualdades: (1) partir de um membro com o objetivo de chegar ao outro e (2) partir da igualdade com o objetivo de chegar a uma tautologia. Além disso, mostraram ser capazes de construir cadeias dedutivas formais usando definições algébricas e princípios lógicos de equivalência, que são objetivos definidos pelo Programa Nacional de Matemática A para os alunos do Ensino Secundário (Silva et al., 2001).

No início da intervenção letiva, os alunos faziam já distinção entre tarefas com a palavra ‘justifica’ e tarefas com a palavra ‘mostra’ privilegiando, nas tarefas do primeiro tipo, as justificações em linguagem natural ou recorrendo a casos particulares e, nas tarefas do segundo tipo, raciocínios mais dedutivos e provas matemáticas, confirmando as afirmações de Balacheff (2000). Apesar disso, os alunos mostraram, inicialmente, dificuldades em distinguir tarefas do tipo ‘mostra que’, das do tipo ‘verifica que’, ou ‘investiga’, sendo que usavam a expressão ‘c.q.d. – como queríamos demonstrar’ sempre que produziam uma prova matemática, mesmo em tarefas nas quais à partida não se sabia o que se queria mostrar. Com a realização e discussão de tarefas de investigação os alunos compreenderam que, numa tarefa deste tipo, devem definir hipóteses e depois estudar a situação tendo-as em conta ou estabelecer conjeturas e testá-la.

Ao longo do estudo, os alunos usaram provas com três motivações principais: (1) como explicação, ao construir a prova para justificar uma asserção que já sabiam ser verdadeira; (2) como verificação, ao determinar a veracidade de uma afirmação; e (3) como descoberta, quando a questão é aberta e os alunos raciocinaram dedutivamente sem terem a certeza do que iriam obter. Outras duas motivações que subjazem estas são a comunicação e o desafio intelectual que os alunos referiram no relatório escrito individual e na entrevista. Todas estas conclusões estão de acordo com as motivações para produzir provas matemáticas propostas por Harel e Sowder (2007).

Concluo ainda da minha análise, que os alunos são capazes de compreender uma demonstração, embora apresentem dificuldades ao nível da compreensão holística e da transferência das ideias gerais para a construção de outras demonstrações (Balacheff, 2000). Já a compreensão local está ao alcance da grande maioria dos alunos, que são capazes de compreender e explicar cada etapa de uma demonstração. Uma parte dos alunos mostrou, ainda, confiança na própria argumentação ao apresentar uma resolução com uma conclusão diferente do enunciado, enquanto outros apresentam ainda uma certeza baseada em convicções externas (Harel & Sowder, 2007) como o professor, o enunciado, o manual ou até mesmo a calculadora gráfica.

Quais os conhecimentos prévios a que os alunos recorrem na resolução de tarefas dirigidas à argumentação, ao longo da unidade de ensino?
Que dificuldades evidenciam na mobilização desses conhecimentos?

Ao longo da unidade de ensino, os alunos mobilizaram conhecimentos sobre funções e sobre outros temas matemáticos, aprendidos ao longo da sua escolaridade. Um conceito central no estudo de funções é o de domínio, que os alunos aprenderam no Ensino Básico, mas que têm vindo a revisitar, cada vez que aprendem uma nova classe de funções (Silva et al., 2001). Em particular, os alunos usaram conhecimentos sobre o domínio de uma função racional, aprendidos no 11.º ano e não mostraram dificuldades em mobilizá-lo, talvez por ser uma aprendizagem recente. No entanto, a maioria dos alunos teve alguma dificuldade em determinar o domínio de definição de uma variável num determinado contexto, o que está em consonância com a pesquisa de Leinhardt et al. (1990). Já outros conceitos específicos do tema das Funções como: objeto, imagem, contradomínio, assíntotas e pontos de interseção com os eixos coordenados foram corretamente mobilizados embora os alunos não se recordassem de alguns deles.

Os alunos mostram também dificuldades na mobilização de algumas aprendizagens do tema da Álgebra do Ensino Básico como a resolução de equações ou a simplificação de expressões algébricas, dividindo ambos os membros de uma equação por uma expressão que pode anular-se, afirmando que $\frac{a}{0} = 0$, ou apresentarem apenas a solução positiva quando resolvem uma equação do tipo $x^2 = a$. Estes erros são devidos à falta de consolidação destes conhecimentos e já tinham sido referidos pelos professores do conselho de turma como obstáculos à aprendizagem de processos mais complexos que exijam o seu uso. No entanto aplicam corretamente a divisão de polinómios e a regra de Ruffini, aprendidas no 10.º ano (Silva et al., 2001).

Em diversas tarefas, os alunos tiveram de mobilizar conhecimentos de Geometria, como o Teorema de Pitágoras, a desigualdade triangular, áreas e perímetros de polígonos e a noção de simetria. Os alunos não mostraram dificuldades em utilizá-los, mostrando estabelecer, com facilidade, conexões com este tema matemático. Nas tarefas dirigidas à argumentação, os alunos usaram argumentos algébricos e geométricos para produzir corretamente justificações e provas matemáticas e tanto em tarefas que o solicitavam explicitamente, como noutras em que acharam adequado, os alunos usaram a calculadora gráfica como ferramenta de apoio para a sua argumentação geométrica. Estes resultados são consonantes com os estudos empíricos de Magalhães e Martinho (2011).

Não houve dificuldades da parte dos alunos em usar, representar e interpretar gráficos, apesar de, nalgumas situações os alunos formularem conjeturas erradas baseadas na convicção externa (Harel & Sowder, 2007) de que a calculadora apresenta sempre gráficos corretos. Já nas tarefas de contexto real, os alunos tiveram facilidade em interpretar o enunciado e em perceber que conceitos matemáticos deveriam mobilizar, em cada questão. Este facto está de acordo os estudos empíricos de Siqueira e Beust (2008) que apontam para uma maior facilidade da parte dos alunos em compreender funções em tarefas de contexto real do que em contexto puramente matemático.

Uma das dificuldades mais evidentes dos alunos é a manipulação de definições na forma algébrica. Os alunos construíram provas usando as definições algébricas de função crescente e decrescente, par e ímpar e de função injetiva, mas apresentaram dificuldade em compreender e usar as definições nesta forma porque estão mais habituados a usar a interpretação geométrica das mesmas, confirmando os resultados de Siqueira e Beust (2008). Também apresentei evidências da tendência que os alunos têm para a linearidade, referida por Leinhardt et al. (1990), nomeadamente no uso de regras de três-simples para encontrar o valor da variável dependente ou nos exemplos de funções escolhidas pelos alunos para ilustrar funções crescentes, decrescentes ou injetivas que são, quase sempre, funções afins.

Ao longo da unidade de ensino, os alunos realizaram aprendizagens sobre operações com funções, função inversa, equações e funções com radicais que também mobilizaram na realização das tarefas propostas. Siqueira e Beust (2008), concluíram no seu estudo que os alunos tinham dificuldade em compreender que a noção de igualdade de funções é dependente da igualdade dos domínios e tendem a omitir este aspeto nas suas resoluções e, no meu estudo, verifiquei uma situação semelhante. As operações aritméticas com funções não criaram dificuldades aos alunos, mas a definição de função composta e de função inversa foram usadas incorretamente em mais de uma ocasião. Os alunos não apresentaram dificuldades diretamente relacionadas com as equações ou funções com radicais, talvez por este tema ser similar às equações e funções polinomiais que os alunos já conheciam.

De que modo o trabalho realizado na unidade de ensino e, em particular, a resolução de tarefas dirigidas à argumentação contribuiu para os alunos desenvolverem uma argumentação mais formal?

Um dos meus objetivos didáticos para a unidade de ensino era promover nos alunos a necessidade e a apreciação pela argumentação e pelo formalismo matemático (Freitas, 2011) e, da análise efetuada, concluo que este objetivo foi parcialmente atingido. Por exemplo, ao longo da intervenção letiva, alguns alunos melhoraram relativamente ao uso de certos termos matemáticos, como ‘objeto’ e ‘imagem’, deixando de os confundir. Já os termos ‘lugar geométrico’, ‘função identidade’ e ‘função inversa’ foram apropriados desde logo pelos alunos, que os usaram corretamente na sua argumentação oral e escrita desde o início da intervenção letiva. No entanto, existem outros termos matemáticos em que os alunos continuam a apresentar dificuldades, como é o caso de ‘função composta’, que a grande maioria dos alunos não usa. Penso que esta dificuldade se deve ao facto de, na maioria das tarefas não aparecer este termo, mas sim a expressão *fog* que se lê ‘*f* após *g*’, levando os alunos a familiarizarem-se mais com esta expressão.

A participação oral de todos os alunos da turma nas discussões, pode ter levado a uma melhoria no rigor e no formalismo da argumentação oral utilizada por estes. Estas discussões serviram também para salientar aspetos das tarefas, diretamente relacionados com a argumentação matemática, como a identificação de dados, hipóteses e teses num enunciado (Mason et al., 1982) e a utilização de provas por contraexemplo. Estes aspetos foram estando mais presentes e surgindo de forma mais autónoma na argumentação dos alunos, ao longo da unidade de ensino. Em entrevista, os alunos foram capazes de referir discussões e tarefas em que tiveram de usar esquemas dedutivos de prova e explicitar algumas das aprendizagens realizadas.

Enunciar as definições de função ou função injetiva, representava uma dificuldade para a maioria dos alunos, no início da unidade de ensino, apesar de compreenderem o significado destes termos e saberem distinguir as correspondências que são funções e quais destas são injetivas. Ao longo da intervenção letiva, os alunos que sabiam enunciar devidamente estas definições foram corrigindo os colegas durante as discussões e notou-se uma melhoria também neste aspeto. Isto vem reforçar a importância das discussões, como momentos de aprendizagem não só de conceitos mas também de rigor e formalismo (Tudella et al., 1999).

No que diz respeito à escrita simbólica específica do tema das funções (NCTM, 2000), os alunos não apresentaram dificuldades, a não ser no tópico das operações com funções, em que alguns alunos não usavam adequadamente os parêntesis, mas essa dificuldade foi rapidamente ultrapassada, com interações professor-aluno. Uma pequena parte dos alunos apresentou dificuldades na utilização dos sinais de igualdade e equivalência, mantendo-as até ao final da intervenção, mas cometendo erros apenas ocasionalmente, o que me leva a concluir que esta dificuldade se deve a falta de atenção, ao resolver as tarefas. Já o símbolo de implicação foi usado corretamente pelos alunos na grande maioria dos casos e estes apresentaram evidências de ter compreendido o seu significado e utilização.

No que se refere ao formalismo da argumentação matemática dos alunos, verificou-se uma maior preocupação em justificar, mesmo em tarefas em que não é pedido explicitamente, e em fazê-lo recorrendo a raciocínio dedutivo. Isto poderá ser resultado das discussões sobre tarefas dirigidas à argumentação em que foram sempre salientadas as vantagens deste tipo de raciocínio. Ao longo da intervenção letiva, nota-se uma maior tendência para os alunos produzirem provas intelectuais, sendo que, alunos que antes justificavam apenas com casos particulares, agora experimentam com casos particulares para se apropriarem melhor da situação mas depois fazem a prova algebricamente.

Obtive, ainda, evidências de que os alunos adaptam a sua argumentação ao enunciado das tarefas, o que vai de encontro às afirmações de Balacheff (2000). Além disso, os alunos mostraram uma crescente apreciação pela argumentação, ao longo da unidade de ensino, afirmando que é importante justificar os raciocínios usados e reconhecendo que a leitura e análise de uma demonstração gera aprendizagens, que serão usadas em tarefas posteriores. Concluo assim que o trabalho com tarefas dirigidas à argumentação leva os alunos a adotar esquemas dedutivos (Harel & Sowder, 2007) e a produzir provas progressivamente mais formais, incluindo demonstrações.

6.2 Reflexão final

A elaboração deste relatório, assim como o estudo que o precedeu, foi para mim uma experiência extremamente enriquecedora, tanto do ponto de vista profissional, tornando-me uma melhor professora, como pessoal, ao expandir os meus conhecimentos e acrescentar o papel de investigadora às funções que já desempenhei. A seleção e a criação de tarefas foi uma das ações que gostei mais de realizar, porque acho essencial adequar a tarefa aos objetivos de aprendizagem definidos e à turma na qual vai ser aplicada e é, para mim, desafiante conseguir essa adequação especialmente se a tarefa for criada por mim. Penso que este objetivo foi conseguido, uma vez que as tarefas permitiram aos alunos realizar as aprendizagens propostas e apenas alteraria a ordem das questões numa das tarefas que criei. Usei pela primeira vez o *datashow* e o retroprojetor, o que também me trouxe aprendizagens, tanto ao nível da preparação e manipulação técnica dos aparelhos, como ao nível da posição em sala de aula, da gestão do quadro e da interação com os alunos durante a sua utilização.

Mesmo antes do início da intervenção, o facto de ter havido uma alteração na sequência dos tópicos a lecionar no 2.º período fez com que a minha intervenção se iniciasse dois meses antes do previsto, o que me levou a ter um trabalho muito mais intensivo na preparação das aulas. O apoio das orientadoras e da professora orientadora cooperante foi essencial para conseguir conceber planificações adequadas aos objetivos de aprendizagem e à turma, o que levou a que fossem na sua maioria cumpridas, minimizando a quantidade de alterações e ajustes necessários para as aulas seguintes. Penso que a gestão do tempo em aula foi um dos aspetos em que melhorei bastante em relação às aulas lecionadas no 1.º período, uma vez que só as últimas duas aulas é que sofreram alterações, motivadas por interrupções imprevistas.

Um aspeto que, apesar das melhorias observadas, precisa ainda de ser mais trabalhado é a mobilização do foco de atenção dos alunos para a discussão em grande grupo, quando estes ainda se encontram a trabalhar numa tarefa. Nestas situações sinto sempre um conflito entre a necessidade de avançar para a discussão das tarefas para que a gestão do tempo se cumpra e onde se podem gerar mais aprendizagens significativas e a vontade de dar sempre mais uns minutos aos alunos para que tenham oportunidade de desenvolver sozinhos os seus raciocínios antes de conhecerem os dos colegas. Apesar disso, considero que as discussões foram proveitosas, participadas e geraram aprendizagens.

Considero que planificar as aulas, detalhadamente e por escrito, me fez evoluir como professora em diversos aspetos, sendo um deles a gestão do quadro. Sempre senti dificuldades neste aspeto e, ao planificar as discussões em grupo-turma passei a prever quantas resoluções seria proveitoso ter simultaneamente escritas no quadro e passei a dividi-lo em colunas de acordo com esta planificação. Outro ponto de melhoria que devo salientar é que eu tinha uma tendência muito grande para perguntar 'quem quer ir ao quadro' em vez de ser eu a selecionar as respostas a apresentar e, ao longo da intervenção, escolhi criteriosamente os alunos que apresentaram respostas no quadro, quer tendo em conta a estratégia usada, quer como forma de promover este tipo de participação em todos os alunos da turma.

Penso que criei uma boa relação com os alunos que sempre reagiram com naturalidade às aulas lecionadas por mim, empenhando-se nas tarefas que lhes propus, participando nas discussões e questionando-me sempre que tinham dificuldades. O trabalho a pares foi proveitoso, na medida em que os alunos se entreajudaram, apesar de cada elemento produzir a sua resposta individual e não ter havido uma resposta ‘do par’. Os alunos realizaram aprendizagens significativas sobre os tópicos lecionados, apesar de terem subsistido algumas dificuldades associadas também à falta de estudo em casa, que se fizeram notar em momentos de avaliação sumativa posteriores à intervenção, incluindo os testes de avaliação elaborados pela professora da turma e no teste intermédio, que continha duas questões sobre operações com funções. Apesar disto, considero que a intervenção letiva foi bem-sucedida e que foram cumpridos os principais objetivos de aprendizagem propostos.

O relatório escrito individual proposto por mim também foi, na minha opinião, uma mais-valia para as aprendizagens dos alunos. Os alunos reagiram bastante bem, quer ao nível da interpretação do enunciado do relatório, pois não evidenciaram dificuldades, quer na forma como encararam esta tarefa, enquanto oportunidade de melhorar a sua classificação do final do período letivo, em vez de mais uma tarefa trabalhosa e difícil. Os alunos ajudaram-se uns aos outros na elaboração do relatório, mantendo, no entanto, a individualidade do trabalho, o que para mim é um ponto extremamente positivo e uma evidência de empenho e investimento na própria formação. Apenas um par de alunas apresentou respostas claramente copiadas numa das questões e na apreciação final e foram penalizadas na classificação, tendo sido este aspeto discutido com as mesmas. Para mim, esta também foi uma oportunidade de aprendizagem, uma vez que nunca tinha proposto um relatório e tive de definir critérios de avaliação e de classificar um instrumento de caráter mais aberto que é, na minha opinião, mais complexo do que um mais fechado, como é o caso do teste tradicional.

A componente de cariz investigativo deste relatório foi, para mim, um desafio novo e estimulante. Primeiro porque a problemática escolhida é genuinamente do meu interesse pessoal, o que faz com que os dados recolhidos e as conclusões retiradas sejam, para mim, relevantes e tenham aplicabilidade direta na minha prática futura; e em segundo lugar porque entendo que todo o professor é um investigador, na medida em que investiga em cada aula, em cada tema, em cada ano e com cada turma, dificuldades, estratégias e o contributo de recursos como o manual, a calculadora gráfica ou o computador, para a aprendizagem dos alunos, aplicando as conclusões tiradas na sua própria prática e tornando-se, assim, um melhor professor.

Foi particularmente desafiante conjugar a observação do trabalho autónomo dos alunos com as constantes solicitações, por parte destes, para esclarecer dúvidas. Estava simultaneamente preocupada em responder às questões dos alunos, em organizar a discussão, selecionando resoluções interessantes e em recolher dados para o estudo. Além disso, o constrangimento temporal da duração do estudo criou uma pressão superior para que as tarefas dirigidas à argumentação fossem resolvidas e discutidas em aula para que eu pudesse observar e registar a argumentação dos alunos, tanto oralmente como por escrito. Penso que consegui realizar estas ações da melhor forma possível. Tentei sempre pôr em primeiro lugar os objetivos de aprendizagem e deixar a recolha de dados como segunda prioridade.

Pretendo aprofundar este estudo, nomeadamente estudando a argumentação em alunos do ensino básico, pois acredito que desde muito jovens, os alunos são capazes de compreender demonstrações e produzir provas matemáticas com maior ou menor grau de formalização. Também gostaria de estudar a influência das convicções externas na tomada de decisão dos alunos sobre a veracidade de uma determinada proposição. Em suma, gostei deste papel de 'investigadora' da própria prática e é com certeza uma experiência a repetir.

Referências

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves (2013a). *Orientações Pedagógicas para o ano letivo 2013/14*. (disponível em http://aenunogoncalves.net/images/ano_letivo_2013_2014/documentos/LAL-2013-2014-Aprovado%20pelo%20CP.pdf)

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves (2013b). *Regulamento Interno*. (disponível em http://aenunogoncalves.net/images/ano_letivo_2013_2014/documentos/regulamento_interno_2013_Aprovado%20pelo%20CGT.pdf)

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (P.Gómez, Trad.). Bogotá: una empresa docente. (Original publicado em 1987).

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007).*Research methods in education.* New York, NY: Routledge.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2011). *Novo Espaço 11*. Porto: Porto Editora.

Duarte, T. O., Filipe, J. P., Gouveia, A., & Fernandes, C. (2011). *Matemática onze*. Lisboa: Lisboa Editora.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). *Protocol analysis: Verbal reports as data (revised edition).*Cambridge, MA: MIT.

Ferreira, J. C. (1988). *Introdução à análise matemática.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Freitas, P. J. (2011). A demonstração matemática no ensino básico e secundário. In *Atas do ProfMat 2011* (pp.1-12). Lisboa: APM.

Goldenberg, E. P. (1999) Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Org.). *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp. 87-96). Lisboa: APM.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Org.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Reston, VA: NCTM.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60* (1), 1-64

Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2011). *A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática*. In: XXII SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática). Lisboa: APM.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). Thinking mathematically. London: Addison-Wesley PC.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim Gepem, 62,* 17-31.

Meija-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 3-18.

Menino, H., & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2.º ciclo do ensino básico. In *Atas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 271-291). Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neves, M. A., Pereira, A., Guerreiro, L. & Machado A. (2011). *Matemática A 11*. Porto: Porto Editora.

Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In E. Castro & E. Torre (Eds.), *Investigación en educación matematica* (pp. 61-84). Corunha: Universidad da Coruña.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 19–40.

Quin, A. L. (2009). Count on number theory to inspire proof. *Mathematics Teacher, 103*(4), 298-304.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (2005). *Manual de investigação em ciências sociais* (J. M. Marques, M. A. Mendes & M. Carvalho, Trad.). Lisboa: Gradiva.

Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: The case of Plane Geometry proof. *Educational Studies in Mathemathics, 80,* 433–450.

Rodrigues, M. (2010). O papel da particularização no processo de demonstrar. In *Atas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-12). Lisboa: APM.

Ryan, G. W., & Bernard, H. R. (1994). Data management and analysis methods. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 769 - 802). London: SAGE.

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Org.), *Educação e matemática: Caminhos e encruzilhadas. Atas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Sebastião e Silva, J. (1974). *Compêndio de Matemática.* Lisboa: G.E.P.

Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *Programa de matemática A do ensino secundário*. Lisboa: Ministério de Educação/DGIDC.

Siqueira, D. A., & Beust, A. C. (2008). O ensino de funções através da interpretação gráfica. *Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, 46* (9), 45-66.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 72,* 271–288.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning,10*(4), 313 – 340.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. M. (1998). *Brochura: Funções, 11.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I., & Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Org.). *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp. 87-96). Lisboa: APM.

ANEXOS

Anexo A: Planos de aula

PLANO DE AULA 1 (17 DE FEVEREIRO DE 2014)

Lições nº99e 100 **Hora:** 10:15 / 11:55 **Sala:** 320 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções–Operações com funções.

Sumário:

Resolução e discussão da ficha de trabalho: "Igualdade de Funções".
Operações com funções: soma, diferença, produto e quociente.
Resolução de tarefas do manual.
Entrega dos testes de avaliação e da respetiva correção.

Objetivos:

Recordar que uma função é caracterizada pela sua lei de formação e pelo seu domínio;
Compreender o conceito de igualdade de funções;
Compreender as noções de função soma, diferença, produto e quociente e definir os respetivos domínios máximos de definição.

Recursos:

Ficha de trabalho: "Igualdade de Funções";
Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Comunicação matemática;
Resolução de problemas;
Interpretação (gráfica e de enunciados);
Autonomia.

Estrutura da aula:

(1) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(2) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Ficha de Trabalho: Igualdade de Funções** (*35 minutos*)

(3) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **tarefa 26** da pág. 98 do manual (*45minutos*)

(4) Resolução a pares e possível discussão em grupo-turma da **tarefa 84** da pág. 99 do manual (*10 minutos*)

(5) Entrega dos testes de avaliação e da respetiva correção (*5 minutos*)

(6) TPC (escrito no quadro e ditado): **tarefas 82, 83 e 85** das pág. 97 e 99 do manual

Desenvolvimento da Aula:

(2) Ficha de Trabalho: Igualdade de Funções (*35 minutos*)

<u>Apresentação da Ficha de Trabalho</u>(*5 minutos*)

- Explica-se aos alunos que devem realizar a ficha a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 15 minutos para aresolver.
- Distribui-se a ficha e folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

RealizaçãodaFicha de Trabalho (*15 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a explorarem outras formas de raciocínio ou a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 1:

Resposta esperada:
$f(3) = g(3) = \frac{1}{2}$, $f(7) = g(7) = \frac{1}{6}$, $f(11) = g(11) = \frac{1}{10}$.
Espera-se que os alunos observem que as imagens nestes pontos são iguais e que talvez conjeturem que serão iguais em todos os pontos ou até que as funções são iguais.

Questão 2:

Respostas esperadas:
1 - $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$,porque 1 é o valor de$x$ que anula o denominador;
$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$,porque 1 e -1são os valores de$x$ que anulam o denominador.
2 - $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, logo $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$;
$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$, logo$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
3 - $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 1\} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$;
$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} = \cdots = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
4 - $D_f = \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R}: x - 1 = 0\} = \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R}: x = 1\} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$;
$D_g = \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 = 0\} = \cdots = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Todas estas respostas são justificações com o mesmo grau de correção e formalidade, excepto a resposta 1 que é menos formal que as outras apesar de totalmente correta.

Possíveis erros e dificuldades:
- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar o domínio das funções, o professor deve perguntar: "Então o que é o domínio de uma função?". Espera-se que os alunos respondam que é"o conjunto dos valores reais para os quais a função está definida", ou de um modo menos formal "o conjunto dos valores de x para os quais a função tem significado". De seguida o professor pergunta: "E para que valores é que uma função racional está definida?". Espera-se que os alunos respondam que "uma função racional está definida para todos os valores reais que não anulem o denominador".
- Os alunos que usarem a forma 1 de resposta podem ter dificuldades em justificar, uma vez que calculam o domínio "de cabeça". Neste caso o professor pode perguntar "Como chegaste a esse(s) valor(es)?". O objetivo é levar o aluno a pensar que é(são) o(s) valor(es) que anula(m) o denominador.
- Alguns alunos podem não considerar a solução positiva e negativa no caso da função g. Neste caso o professor deve perguntar: "este é o único valor que ao quadrado é igual a 1?".

Questão 3:

Respostaesperada:

$$f(-1) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

O objetivo desta questão é levar os alunos a perceber que há um valor para o qual a função f faz sentido e a funçãog não, para os levar a questionar a igualdade entre as duas.

Questão 4:

Resposta esperada:

Espera-se que os alunos estabeleçam uma conjetura sobre a igualdade destas funções particulares, para chegarem à definição de igualdade de funções. O professor deve incentivar a justificação da conjetura feita, quer seja correta ou incorreta.

- É de esperar que os alunos que concluírem que as funções são iguais, justifiquem baseados na igualdade das imagens obtidas. Neste caso, o professor deve perguntar "E o que acontece nestes casos, acontece necessariamente com todos os outros objetos?". O objetivo é incentivar os alunos a recorrer à simplificação da expressão de g, como forma de verificar esta igualdade para qualquer ponto do domíniode$g$ ou, pelo menos, levá-los a questionar se a igualdade se manterá com objetos negativos ou não inteiros.

Questão 5:

Resposta esperada:

Espera-se que os alunos, no caso da função f, optem por (1) usar a calculadora gráfica ou (2) desenhem o gráfico da função usando o que aprenderam sobre funções racionais do tipo $p(x) = a + \frac{b}{cx+d}$.

Para o caso da funçãog, podem (1) usar a calculadora, (2) fazer tabela com alguns pontos de g e traçar o gráfico a partir daí ou (3) simplificar a expressão e depois representar o gráfico.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos que optem pela estratégia 2, no caso da função f, podem ter dificuldades em identificar as assíntotas e a monotonia da função. Neste caso o professor deve incentivá-los a discutir isso com o par e procurar nos seus apontamentos ou no manual.

- Os alunos que optem pela estratégia 2, no caso da função g, podem ter dificuldades em perceber a forma do gráfico e as assíntotas da função. O professor deve perguntar "Como podes ter a certeza que o gráfico tem essa forma?". O objetivo é levar os alunos a perceber que a estratégia de encontrar pontos particulares sóé eficaz se já soubermos a forma do gráfico da função.

- Ao representar o gráfico com o auxílio da calculadora, os alunos podem não ter em consideração o domínio e não excluírem o ponto de abcissa -1 no caso da funçãog. O professor deve perguntar "Tens a certeza que essa é uma representação do gráfico de g?", o objetivo é fazer o aluno pensar sobre este assunto mas sem ser muito diretivo pois esta será uma questão a discutir em grupo-turma.

Discussão daFicha de Trabalho (*15 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- O professor escolhe, para cada questão da 1 à 4, um aluno para registar no quadro a sua resposta, tendo em conta os seguintes critérios:

Questões 1 e 3 – Preferencialmente um aluno com baixa classificação ou que participe pouco(pois o nível de dificuldade desta questão é baixo), para que consiga explicar o que fez sem se atrapalhar, motivando-o para continuar a trabalhar.

Questão 2 – Um aluno que tenha a resolução correta (em qualquer das quatro formas) preferencialmente num formato que seja diferente do que a maioria tenha usado para discutir a equivalência entre formatos de resposta.

Questão 4 - Apresentará as suas conclusões, primeiroum par que tenha respondido que são iguais (preferencialmente um par que tenha feito a simplificação da expressão de g) e depois um que tenha respondido que são diferentes. Deve ser salientada a resposta à questão 3 questionando a turma: "-1 tem imagem pela função g?".

Questão 5 – Caso haja algum par que tenha seguido a estratégia de encontrar pontos particulares, dever-se-á chamar um representante desse par ao quadro para se discutir a eficácia deste método. No caso da função f, deve escolher-se um aluno que tenha desenhado o gráfico tendo em conta as propriedades das funções racionais estudadas. Deve discutir-se a questão do domínio da função g e da necessidade do gráfico ser coerente com o domínio encontrado.

- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"Igualdade de Funções:

Duas funções f e g, dizem-se iguais se e sóse:$D_f = D_g$e$\forall x \in D_f, f(x) = g(x)$."

Discutir o significado do quantificador universal e referir que podemos trocar $\forall x \in D_f$por$\forall x \in D_g$.

(3)tarefa 26 da pág. 98 do manual (*50 minutos*)

Apresentação da Tarefa 26 da pág. 98 do manual

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 20 minutos para a resolver.
- Pede-se aos alunos que a leiam em silêncio e comecem a resolvê-la.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto.

RealizaçãodaTarefa 26 da pág. 98 do manual(*20 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a explorarem outras formas de raciocínio ou a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questões 1 e 2:

Resposta esperada:

Questão 1 - $f(6) = 2 \times 6 = 12$, $g(6) = \frac{6^2}{4} = 9$

R: A máquina A produz 12 metros de tecido durante as 6 horas e a máquina B produz 9 metros de tecido no mesmo intervalo de tempo.

Questão 2 - A expressão representa o número total de metros de tecido produzidos pelas duas máquinas ao fim de duas horas.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o enunciado. Como forma de desenvolver a autonomia, e visto que não é uma situação complicada, o professor deve apenas questionar "Já leste o enunciado? O quecompreendestesobre a situação?".

Questão 3:

Respostaesperada:

$$2x + \frac{x^2}{4}$$

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos tiverem dificuldade em escrever a expressão, o professor deve perguntar "Então qual é a expressão que nos dá a quantidade de tecido produzida pela máquina A? E B? E o que queremos representar?".

Questão 4:

Respostas esperadas:

1 – A letra a representa a imagem de 6 pela função f; a letra b representa a imagem de 6 pela função g; e a letra c representa a imagem de 6 pela função h.

2 - A letra a representa a quantidade de metros de tecido produzidos pela máquina A ao fim de 6 horas; a letra b representa a quantidade de metros de tecido produzidos pela máquina B ao fim de 6 horas; e a letra c representa a quantidade de metros de tecido produzidos pelas duas máquinas ao fim de 6 horas.

Ambas as respostas estão corretas do ponto de vista matemático, mas uma delas é contextualizada e a outra não.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o gráfico. O professor deve fazer perguntas do tipo "No eixo das abcissas está representado o quê? E no das ordenadas? O que representa a função h?"

- Caso os alunos optem pela resposta 1 o professor deve salientar que o enunciado da questão pede para dizer o significado das letras no contexto do problema.

Questão 5:

Respostas esperadas:

1 - Fazer tentativas até obter o valor correto.

$2 - f(x) + g(x) = 12 \Leftrightarrow 2x + \frac{x^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 4 \lor x = -12;$

R: Como o número de horas tem de ser positivo, concluímos que são necessárias 4 horas para as duas máquinas em conjunto produzirem 12 metros de tecido.

Possíveis erros e dificuldades:

- É possível que alguns alunos considerem $f(x) = 6$ e$g(x) = 6$. Neste caso o professor deve perguntar "mas para produzirem 12 metros de tecido é obrigatório que produzam a mesma quantidade cada uma? Não pode ser 8 numa e 4 noutra? Ou 10 numa e 2 noutra?". O professor deve ainda lembrar o aluno que as máquinas são postas em funcionamento ao mesmo tempo.

- Se os alunos optarem pelo método das tentativas o professor deve tentar aperceber-se da forma como o aluno escolhe os casos a testar. Se são aleatórios ou se o aluno os está a escolher com algum critério. Quando o aluno chegar à resposta o professor deve perguntar "E se a resposta não fosse um número inteiro? Conseguirias encontrar por tentativas?". O objetivo é levar o aluno a pensar noutra alternativa mas sem o desviar logo do raciocínio inicial.

- Se os alunos tiverem dificuldade em escrever a equação que traduz a questão, o professor deve perguntar "Então qual é a expressão que nos dá a quantidade de tecido produzida pela máquina A? E B? E o que queremos representar?".

- É de esperar que alguns alunos resolvam a equação mas não selecionem a resposta ao problema ou que não justifiquem essa escolha. O professor deve incentivar, perguntando"Já deste resposta ao que era pedido?".

Discussão da Tarefa 26 da pág. 98 do manual(*25 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Nas questões 1 e 2, o professor pede, para cada uma, a um aluno que tenha a resposta correta e que não tenha ainda participado nas discussões nem ido ao quadro nessa aula, para responder oralmente.

- Outro aluno irá ao quadro registar a resposta às questões 3 e 4, preferencialmente alguém que na questão 4 tenha feito a interpretação contextualizada.

- Para a questão 5 deve escolher-se uma resolução por tentativas (caso exista) e outra algébrica. Chama-se a atenção para o facto de a resolução por tentativas não ser uma boa abordagem caso o valor a determinar não fosse inteiro e mesmo neste caso é um processo muito mais moroso.

- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Compara-se o domínio de f, g e h e pergunta-se à turma "E se as funções tivessem um domínio diferente?" Exemplo $f(x) = 2x$e$g(x) = \frac{1}{x}$.Espera-se que os alunos se dividam entre achar que a função soma teria como domínio a interseção dos domínios ou achar que o domínio seria $\mathbb{R}$. O professor pergunta "Então qual seria a imagem de 0 pela função soma? Faria sentido?".

Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"Função soma:

Dadas duas funções f e g, chamamos função soma de f com g e representamos por$f + g$, à função definida da seguinte forma:

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$e$\forall x \in D_{f+g}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$."

"Então como podemos definir a função diferença? E produto? E quociente? Será que são sempre funções? Será que a propriedade da interseção dos domínios se mantém?". Recorre-se às funções dadas como exemplo anteriormente.

Escreve-se com a ajuda dos alunos a seguinte síntese:

"Função diferença:

Dadas duas funções f e g, chamamos função diferença entre f e g e representamos por$f - g$, à função definida da seguinte forma:

$D_{f-g} = D_f \cap D_g$e$\forall x \in D_{f-g}, (f - g)(x) = f(x) - g(x)$."

"Função produto:

Dadas duas funções f e g, chamamos função produtode$f$por$g$ e representamos por$f \times g$, à função definida da seguinte forma:

$D_{f\times g} = D_f \cap D_ge\forall x \in D_{f\times g}, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$."

"Função quociente:

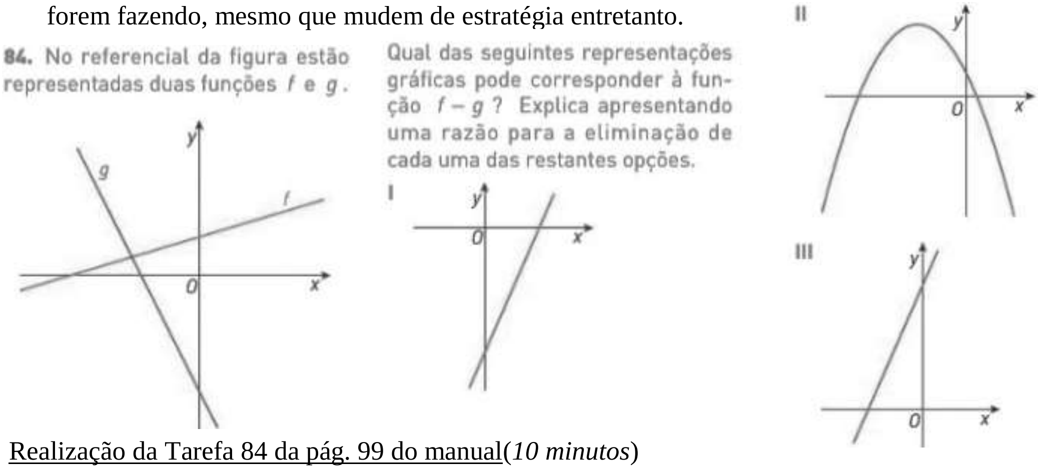
Dadas duas funções f e g, chamamos função quociente entre f e g e representamos por$\frac{f}{g}$, à função definida da seguinte forma:

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \backslash \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}e\forall x \in D_{\frac{f}{g}}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$."

(4) tarefa84 da pág. 99 do manual (*10 minutos*)

Apresentação da Tarefa 84 da pág. 99 do manual

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 10 minutos para a resolver.
- Pede-se aos alunos que a leiam em silêncio e comecem a resolvê-la.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto.


84. No referencial da figura estão representadas duas funções f e g.

Qual das seguintes representações gráficas pode corresponder à função $f - g$? Explica apresentando uma razão para a eliminação de cada uma das restantes opções.

Realização da Tarefa 84 da pág. 99 do manual(*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a explorarem outras formas de raciocínio ou a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.
O professor aproveita este tempo para indicar as tarefas para T.P.C.

Respostas esperadas:

- Para excluir I:
  - O ponto onde as funções se intersetam corresponderá a um zero da função diferença, logo a função tem de ter umzero com abcissa negativa e, portanto não pode ter o gráfico representado em I.
  - $f(0) > g(0)$logo$(f - g)(0)$tem de ser positiva.
  - De $-\infty$ até um certo ponto a, as $g(x) > f(x)$, logo, nesse intervalo, $(f - g)(x)$tem de ser negativa (é possível fazer um argumento equivalente para o intervalo$[0, +\infty[$).

- Para excluir II:
  - A função $f - g$ só teráumzero e, por isso, não pode ter o gráfico representado em II.
  - f e g são funções afins e logo a sua expressão algébrica é um polinómio do 1.º grau. Assim, quando efetuamos a diferença entre as funções nunca poderemos obter um polinómio de grau 2.
  - De 0 a $+\infty$, as $f(x) > g(x)$, logo, nesse intervalo, $(f - g)(x)$tem de ser positiva.
- O gráfico correto é, portanto, o que está representado em III.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar os gráficos. Se não conseguirem avançar, o professor deve sugerir que tentem perceber o que acontece com os zeros ou com os sinais.

Esta tarefa será discutida apenas se houver tempo. Caso contrário guarda-se a discussão para a aula seguinte. A discussão será feita oralmente pela turma em conjunto. Serão reproduzidos no quadro pelo professor esboços dos gráficos.

No final da aula o professor alerta os alunos para deixarem em cima da mesa todas as resoluções de tarefas feitas durante a aula.

PLANO DE AULA 2 (18 DE FEVEREIRO DE 2014)

Lição nº101 **Hora:** 9:05 / 9:55 **Sala:** 322 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções–Operações com funções.

Sumário:

Resolução e discussão da ficha de trabalho: "Estudar a Paridade".
Esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos para casa.

Objetivos:

Recordar o conceito de paridade de uma função;
Estudar a paridade das funções soma, diferença, produto e quociente;
Cimentar os conhecimentos sobre operações com funções.

Recursos:

Ficha de trabalho: "Estudar a paridade";
Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Argumentação matemática.

Estrutura da aula:

(1) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(2) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Ficha de Trabalho: Estudar a Paridade** (*35 minutos*)

(3) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*10minutos*)

(4) TPC (escrito no quadro e ditado): **tarefas 16 e 17** da pág. 133**, 86** da pág. 100 **e 91** da pág. 102 do manual

Desenvolvimento da Aula:

(2) Ficha de Trabalho: Estudar a Paridade (*35 minutos*)

Apresentação da Ficha de Trabalho(*5 minutos*)

- Explica-se aos alunos que devem realizar a ficha a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 20 minutos para aresolver.
- Distribui-se a ficha e folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.O professor não deve alertar os alunos para o facto de haver três versões da ficha porque o objetivo é poder comparar as respostas.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto.
- Relembra-se o significado de "função real de variável real" e pergunta-se aos alunos "qual a definição de função par? E ímpar?". Relembra-se a definição algébrica e as características gráficas.

Realização da Ficha de Trabalho (*15 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a explorarem outras formas de raciocínio ou a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

O professor deve tentar o mais possível que os alunos não se apercebam das diferenças entre versões.
Questões1, 2 e 3:

Respostas esperadas:

- Questão 1: os alunos podem produzir uma demonstração, uma prova ou uma justificação.

Um exemplo de demonstração:

Questão 1 - versão A:

Se f e g são funções ímpares, então $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$e $g(-x) = -g(x)$. Assim,
$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) =$ (por definição de função soma)
$= -f(x) + \left(-g(x)\right) =$ (porque f e g são ímpares)
$= -f(x) - g(x) = -\left(f(x) + g(x)\right) = -(f+g)(x)$, logo$f + g$éímpar, c.q.d.

Um exemplo de prova por exibição:

Questão 1 - versão B:

$(f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) - \left(-g(x)\right) = -f(x) + g(x) = -\left(f(x) - g(x)\right) = -(f-g)(x)$.

Podem ainda justificar baseados nas características gráficas das funções pares e ímpares ou usando exemplos particulares.

- Questões 2 e 3: as respostas serão semelhantes mas os alunos têm de formular hipóteses e/ou tirar conclusões.

- Na questão 3, os alunos devem também verificar a situação em que uma das funções é par e outra ímpar. Esta pergunta é aberta, por isso é possível que os alunos tentem saber o que acontece no caso de uma ou ambas as funções não serem pares nem ímpares. O professor deve deixá-los seguir esses caminhos incentivando-os a experimentar com exemplos de funções particulares.

Possíveis erros e dificuldades:

- Nas questões 1 e 2, se os alunos não souberem como começar o professor deve perguntar “O que sabemos e o que queremos saber/provar? O que significa ser par/ímpar?”.

- Na questão 3, se os alunos não souberem como começar o professor deve reforçar que “no enunciado está escrito “tendo em conta a paridade de f e g” e por isso deve ser boa ideia separar o problema em casos”.

Questão 4:

Respostas esperadas:

Esta questão poderá ser totalmente resolvida na discussão, caso os alunos não tenham tempo de a resolver no tempo previsto para a tarefa.

Os alunos podem justificar baseados na investigação feita sobre a paridade de $f \times g$, uma vez que as “regras dos sinais” são as mesmas, ou podem repetir a investigação para o caso do quociente.

Discussão daFicha de Trabalho (*15 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Primeiro vai estudar-se a paridade da função soma, depois diferença, em seguida produto e por fim quociente.
- Para as três primeiras o professor chama ao quadro alguém que tenha a versão com “mostre que...”, depois alguém com a versão “supondo que…” e por fim alguém com a versão “investigue…”. Caso existam respostas com diferentes graus de formalidade (justificações, provas e demonstrações), o professor deve, no total dos três estudos da paridade, discutir a maior quantidade possível de estratégias de argumentação (começando, se possível, pelas menos formais).
- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.
- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

“Sef e g são funções pares, então$f+g, f-g, f \times g$e$\frac{f}{g}$são pares.

Sef e g são funções ímpares, então$f+g$ e $f-g$ sãoímpares, e $f \times g$e$\frac{f}{g}$sãopares.

Sefé uma função par e gé uma funçãoímpar, então$f+g$ e $f-g$não são pares nem ímpares, e $f \times g$e$\frac{f}{g}$sãoímpares.

(3) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*10 minutos*)

- A primeira coisa a fazer deve ser a discussão da tarefa 84 (caso não tenha sido feita na aula anterior). Seguem-se as tarefas **82, 83 e 85** das pág. 97 e 99 do manual.

PLANO DE AULA 3 (19 DE FEVEREIRO DE 2014)

Lição nº102 **e** 103 **Hora:** 10:15 / 11:55 **Sala:** 209 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Operações com funções.

Sumário:

Discussão da ficha de trabalho: "Estudar a Paridade".
Esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos para casa.
Resolução de tarefas do manual sobre operações com funções.
Resolução e discussão da ficha de trabalho: "Composição de Funções".

Objetivos:

Cimentar os conhecimentos sobre operações com funções;
Compreender a definição de função composta e o seu domínio máximo de definição.

Recursos:

Ficha de trabalho: "Estudar a paridade";
Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Acetatos e projetor;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Argumentação matemática;
Comunicação matemática
Resolução de problemas.

Estrutura da aula:

(1) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(2) Finalização da discussão da **Ficha de Trabalho: Estudar a Paridade** (*10 minutos*)

(3) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*15 minutos*)

(4) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Ficha de Trabalho: Composição de Funções** (*55 minutos*)

(5) Resolução a pares da **Tarefa 95** da pág. 104 do manual (*15 minutos*)

(6) TPC (escrito no quadro e ditado): **tarefas 18 e 19**da pág. 134,**89** da pág. 101,**93** da pág. 103,**97 e 98** da pág. 108 do manual.

Desenvolvimento da Aula:

(2) Finalização da discussão da **Ficha de Trabalho: Estudar a Paridade** (*10 minutos*)

Projeta-se a síntese de ideias sobre a ficha e vai-se discutindo passo a passo com os alunos. De seguida distribui-se uma cópia para cada aluno.

(3) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*15 minutos*)

- O professor começa por perguntar se houve dúvidas em cada um dos exercícios propostos para T.P.C. Consoante o tempo disponível, o professor pode pedir a um aluno para ir fazer a resolução e explicar ao colega que teve dúvidas; ou pode o professor ir perguntando aos alunos como fizeram e ir registando no quadro.
- A corrigir: tarefas **82 e 83** da pág. 97, **84 e 85** da pág. 99.

(4) Ficha de Trabalho: Composição de Funções (*55 minutos*)

<u>Apresentação da Ficha de Trabalho</u> (*5 minutos*)

- Explica-se aos alunos que devem realizar a ficha a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 25 minutos para a resolver.
- Distribui-se a ficha e folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

Realização da Ficha de Trabalho (*25 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão1:

Respostas esperadas:

- Questão 1.1: $2500 + 0{,}3 \times 9000 = 5200$R: O Dj Guita recebeu 5200€ pelo concerto de dia 8 de Agosto.
- Questão 1.2: $D(l) = 2500 + 0{,}3l$
- Questão 1.3: $D_D = [8000, +\infty[$, porque o lucro tem de ser igual ou superior a 8000€.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o enunciado. Como forma de desenvolver a autonomia, o professor deve apenas questionar "Já leste o enunciado? És capaz de me explicar por palavras tuas a situação?". O que pode levantar mais dúvidas é compreender que os 9000€ são lucro da venda dos bilhetes e que desses temos de calcular a comissão que será paga ao Dj. Também pode haver dúvida em perceber que "o que o Dj recebe" inclui o *cachet* fixo e a comissão, neste caso o professor deve interromper o trabalho autónomo e esclarecer o enunciado com a turma.
- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar o domínio da função ou responderem que é $\mathbb{R}$, o professor deve perguntar: "Então o que é o domínio de uma função?". Espera-se que os alunos respondam que é "o conjunto dos valores para os quais a função está definida". De seguida o professor pergunta: "E para que valores é que esta função está definida? $l$pode tomar qualquer valor?".

Questões2.1 e 2.2:

Respostas esperadas:

- Questão 2.1: $32{,}50 \times 300 - 650 = 9100$R: O lucro obtido com a venda de 300 bilhetes no pavilhão Arina é 9100€.
- Questão 2.2: Temos de multiplicar o valor de 32,50€ pelo número de bilhetes vendidos e retirar as despesas de 650€. Esta função está definida para valores naturais porque o número de bilhetes vendido tem de ser inteiro e positivo, mas não pode ser superior a 2000 porque o pavilhão só tem 2000 lugares.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o enunciado. Como forma de desenvolver a autonomia, o professor deve apenas questionar "Já leste o enunciado? O que compreendeste sobre a situação?".
- Também pode haver dúvida em perceber que "o lucro obtido no pavilhão" é apenas a diferença entre o valor obtido com as vendas e os custos fixos do pavilhão. Neste caso o professor deve interromper o trabalho autónomo e esclarecer o enunciado com a turma, explicando que o lucro obtido na pavilhão é o lucro total e que será depois repartido entre o pavilhão, o artista e outros organizadores.
- Os alunos podem não justificar que$n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2000$. Neste caso, o professor deve questionar "Que valores é que o número de bilhetes pode tomar? Como é que podemos justificar estas condições?".
- Os alunos podem achar que seria necessário garantir que o lucro não fosse inferior a 8000€ mas nesse caso o professor deve relembrar que não estamos a falar de um concerto com o Dj Guita mas sim de qualquer concerto no pavilhão Arina e, neste caso, não há limite mínimo para o lucro.

Questão 2.3:

Respostas esperadas:

- Questão 2.3.1: $8000 = 32{,}5n - 650 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow n \simeq 266{,}15$R: Como o número de bilhetes tem de ser um número natural, têm de ser vendidos 267 bilhetes para que o Dj aceite dar o concerto.

Os alunos podem também resolver esta questão com o auxílio da calculadora gráfica.

- Questão 2.3.2:$32{,}50 \times 1500 - 650 = 48100$e $2500 + 0{,}3 \times 48100 = 16930$R: O Dj Guita vai receber 16930€ pelo concerto no pavilhão Arina.

Os alunos podem também optar por escrever a expressão $2500 + 0{,}3 \times (32{,}50 \times 1500 - 650)$.

- Questão 2.3.3: $2500 + 0{,}3 \times (32{,}50 \times n - 650) = 16930$.

Caso haja alunos que terminem a tarefa antes do tempo o professor deve perguntar "e para que valores de né que a função está definida?".

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o enunciado. Como forma de desenvolver a autonomia, o professor deve apenas questionar "Já leste o enunciado? O que compreendeste sobre a situação?".

- Na questão 2.3.1, os alunos podem dar como resposta que o número de bilhetes é 266, 15. Neste caso o professor questiona "É possível vender 266,15 bilhetes?".

- Na questão 2.3.1, os alunos podem dar como resposta que o número de bilhetes é 266. Neste caso o professor questiona "Se forem vendidos 266 bilhetes quanto é o lucro obtido pelo pavilhão Arina? E nesse caso o Dj Guita aceita dar o concerto?".

- Para os alunos que optarem pela primeira estratégia na questão 2.3.2 e que tenham dificuldades em resolver a questão 2.3.3, o professor deve sugerir que tentem juntar os dois cálculos que fizeram numa só expressão numérica.

- É possível que os alunos tentem escrever uma versão simplificada da expressão e nesse caso o professor não deve intervir deixando-os simplificar a expressão.

Discussão daFicha de Trabalho (*25 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Para as questões 1, 2.1 e 2.2, o professor seleciona um aluno para registar no quadro cada alínea, preferencialmente um aluno que tenha a resolução correta, mesmo que incompleta. Deve discutir-se o domínio e as expressões obtidas, salientando que a quantia que o Dj recebe depende do lucro obtido com a venda dos bilhetes e que este lucro depende do número de bilhetes vendidos.

- Para a questão 2.3.1 o professor deve selecionar (se existirem) duas estratégias diferentes para cada alínea, começando pela estratégia em que indicam mal o número de bilhetes (seja gráfica ou analiticamente).

- Para a questão 2.3.2 o professor deve selecionar (se existirem) duas estratégias diferentes para cada alínea, começando pela estratégia em que fazem os cálculos em separado e salientando que é possível calcular o que queremos recorrendo a uma só expressão.

- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- A questão 2.3.3 será respondida em grupo-turma com o professor no quadro. Deve discutir-se a expressão, perguntando aos alunos como fizeram e relacionando com a resposta anterior em que se usou uma única expressão.

Discute-se ainda o domínio desta função perguntando "Para que valores é que esta função está definida?". Pretende-se que os alunos percebam que n tem de tomar valores naturais entre 267 e 2000.

- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"Função composta:

Dadas duas funções f e g, chamamos função composta de f com g e representamos por $f \circ g$ (lê-se f após g), à função definida da seguinte forma:

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$ e $\forall x \in D_{f \circ g}, (f \circ g)(x) = f(g(x))$."

- "Todas as funções podem ser encaradas como compostas!". O professor escreve no quadro a função $t(x) = (x + 5)^3$ e em seguida questiona: "Se pensarmos nesta função como uma composta, quais poderiam ser as funções f e g que verificassem $t = f \circ g$?"

(2) Tarefa 95 da pág. 104 do manual (*25 minutos*)

Apresentação da Tarefa 95 da pág. 104 do manual (5 minutos)

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 20 minutos para a resolver.
- Distribui-se folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

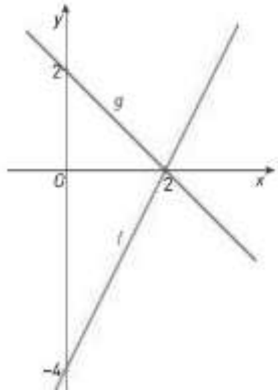
95. No referencial da figura estão representadas as funções f e g através de duas retas.

Mostra que:

95.1 $(f+g)(x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

95.2 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = -2$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

95.3 $(f \times g)(x) = -2(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$



Realização da Tarefa 96 da pág. 104 do manual (*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a explorarem outras formas de raciocínio ou a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 1:

Respostas esperadas:

-Os alunos podem responder baseados em argumentos gráficos argumentando que:

"feg são funções afins e logo têm como expressão algébrica polinómios de 1.º grau e têm domínio $\mathbb{R}$. Assim, a sua soma só pode ser um polinómio de grau 1 ou 0 e, portanto, a representação gráfica da função soma será uma reta. Claro que a representação de $-g(x)$é também uma reta. Como $(f+g)(2) = 0 = -g(2)$e$(f+g)(0) = 2 + (-4) = -2 = -g(0)$, estas retas coincidem em dois pontos e, portanto são iguais. Logo as funções têm o mesmo gráfico e o mesmo domínio ($\mathbb{R}$), portanto são iguais."

- Outra abordagem é, a partir dos pontos assinalados no gráfico, encontrarem a expressão algébrica de f e g e calcularem $f+g$ e $-g$ para concluírem que as expressões são iguais. Têm também de argumentar a igualdade do domínio como no caso anterior.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos que optarem pela primeira estratégia poderão ter dificuldades em expressar-se de forma rigorosa e nesse caso o professor deve ir questionando os argumentos dos alunos para os fazer aprimorar a resposta.
- Os alunos que optarem pela segunda abordagem poderão ter dificuldade em encontrar a expressão algébrica de cada uma das funções. Neste caso, o professor deve perguntar "Estas funções são de que tipo? E como é a expressão geral de uma função afim?". O objetivo é ir ajudando os alunos a relembrar estes procedimentos.
- Caso os alunos tenham dificuldade em determinar a expressão de $f+g$ o professor deve perguntar "Então como encontramos a imagem de um objeto pela função soma". O objetivo é levar os alunos a perceber que devem somar as expressões de fe g.

- É de esperar que os alunos se esqueçam de argumentar, tanto num caso como noutro, que os domínios são iguais a $\mathbb{R}$. O professor deve salientar "Queremos mostrar esta igualdade para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Será que já está?".

<u>Questões2 e 3:</u>

<u>Resposta esperada:</u>

- É espectável que os alunos abandonem a argumentação gráfica e adotem a estratégia de usar as expressões algébricas de f e g.
- Na questão 2 devem também justificar que o domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ porque a função g tem um zero para $x = 2$ e na questão 3 devem justificar que o domínio é $\mathbb{R}$ porque as funções f e g têm ambas domínio $\mathbb{R}$.

<u>Possíveis erros e dificuldades:</u>

- Podem surgir erros de cálculo, devidos a falta de bases dos alunos no que diz respeito a manipulação de expressões algébricas. O professor deve intervir informando que há um erro de cálculo num determinado passo e incentivando o aluno a tentar descobrir o erro.

<u>Discussão da Tarefa 96 da pág. 104 do manual</u> (será feita na aula seguinte pelo professor no quadro com a ajuda dos alunos).

PLANO DE AULA 4 (24 DE FEVEREIRO DE 2014)

Lição nº104 **e** 105 **Hora:** 10:15 / 11:55 **Sala:** 320 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções–Operações com funções e Função inversa.

Sumário:

Funções permutáveis.

Resolução e discussão da ficha de trabalho: "Algumas propriedades da composição de funções".

Definição de função inversa.

Esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos para casa.

Objetivos:

Cimentar os conhecimentos sobre composição de funções;
Compreender a definição de permutabilidade de funções;
Estudar a monotonia da função composta;
Introduzir a definição de função inversa.

Recursos:

Ficha de trabalho: "Algumas propriedades da composição de funções";
Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Argumentação matemática;
Comunicação matemática;
Resolução de problemas.

Estrutura da aula:

(4) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(5) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Ficha de Trabalho: Algumas propriedades da composição de funções** (*65 minutos*)

(6) Discussão em grupo turma sobre a noção de função inversa (*15 minutos*)

(4) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*15 minutos*)

(5) TPC (escrito no quadro e ditado): **tarefa 95** da pág. 109, **101** da pág. 109 e **36** da pág. 145 do manual.

Desenvolvimento da Aula:

(2) Ficha de Trabalho: Algumas propriedades da composição de funções (*65 minutos*)

<u>Apresentação da Ficha de Trabalho</u> (10 minutos)

- Relembra-se o significado de função monótona e as definições analíticas de função crescente e decrescente.

- Explica-se aos alunos que devem realizar a 1.º questão a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 15 minutos para a resolver.

- Distribui-se a ficha de trabalho e folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

Realização da questão 1 da Ficha de trabalho (*15 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 1:

Respostas esperadas:

- Na questão 1.1 os alunos têm de formular hipóteses e/ou tirar conclusões e podem produzir uma demonstração, uma prova ou uma justificação. Devem separar os dois casos em estudo.

Exemplo de justificação:

- Por exemplo, as funções $f(x) = x$ e $g(x) = 2x$ são ambas funções reais de variável real e crescentes, e $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x$ que é crescente, por isso a função composta de duas funções crescentes é crescente.

Exemplo de demonstração:

Se f e g são funções decrescentes, então dados $x_1, x_2 \in D_f \cap D_g$,
$x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \wedge g(x_2) \leq g(x_1)$.
Sejam $x_1, x_2 \in D_{f\circ g}$ tais que $x_2 \geq x_1$.
Temos então que, $g(x_2) \leq g(x_1)$, (porque g é decrescente)
logo $f\big(g(x_2)\big) \geq f\big(g(x_1)\big)$ (porque f é decrescente)
Ou seja, $(f \circ g)(x_2) \geq (f \circ g)(x_1)$, logo $f \circ g$ é crescente.

- Na questão 1.2 as respostas serão semelhantes às da questão 1.1.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos não souberem como começar o professor deve reforçar que "no enunciado está escrito "ambas crescentes ou ambas decrescentes" e por isso deve ser boa ideia separar o problema nesses dois casos".
- Se os alunos, ainda assim, não souberem como começar a investigar um dos casos, o professor deve perguntar "O que sabemos e o que queremos saber? O que significa ser crescente/decrescente?".
- Caso os alunos tenham dificuldade em determinar usar a definição de função composta, o professor deve perguntar "Então como encontramos a imagem de um objeto pela função composta". O objetivo é levar os alunos a perceber que devem pensar em $f(g(x))$.
- Se os alunos justificarem com base num exemplo, o professor deve questionar se assim fica provado para quais quer funções. O objetivo é levar o aluno a usar o exemplo como genérico ou a optar por uma argumentação mais intelectual (sem recorrer a casos particulares).

Discussão da questão 1 da Ficha de Trabalho (*10 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Caso existam respostas com diferentes graus de formalidade (justificações, provas e demonstrações), o professor deve discutir entre as duas questões, a maior quantidade possível de estratégias de argumentação (começando pelas menos formais).
- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.
- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"Se f e g são funções monótonas com o mesmo sentido de variação, então $f \circ g$ é crescente.

Se f e g são funções monótonas com sentidos de variação distintos, então $f \circ g$ é decrescente."

Apresentação da questão 2 da Ficha de Trabalho

- Informa-se os alunos de que terão 10 minutos para a resolver.

Realização da questão 2 da Ficha de trabalho (*15 minutos*)

Questão2:

Respostas esperadas:

- $(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = (2x+1)^3$ e $D_{h\circ f} = \mathbb{R}$
- $(f \circ h)(x) = f\big(h(x)\big) = 2x^3 + 1$ e $D_{f\circ h} = \mathbb{R}$
- $(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{1}{x^3}$ e $D_{g\circ h} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $(h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{1}{x^3}$ e $D_{h\circ g} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- Questão 2.2: A composição de funções não é comutativa porque, por exemplo, $h \circ f \neq f \circ h$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em determinar a expressão da função composta. O professor deve perguntar "Então qual é a definição de função composta? Como encontramos a imagem de um objeto pela função $h \circ f$?". O objetivo é levar os alunos a perceber que devem calcular $h\big(f(x)\big)$.
- Se os alunos tiverem dificuldade em achar o domínio da função composta, o professor deve salientar que estas funções estão definidas no seu domínio máximo de definição e que, portanto, a função composta também estará.
- Em relação à questão 2.2 os alunos podem não perceber que basta um contraexemplo para mostrar que a composição não é comutativa. O professor deve perguntar: "O que significa uma operação ser comutativa?".

Discussão da questão 2 da Ficha de trabalho(*15minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Para a questão 2.1, o professor escolhe preferencialmente um aluno com baixa classificação ou que participe pouco, para se certificar que mesmo os alunos com mais dificuldades estão a compreender o que é a composição de funções.
- Depois do aluno registar no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.
- A questão 2.2 será discutida oralmente e o professor pergunta a um aluno que participe pouco se a composição é comutativa ou não e porquê. Deve salientar-se que quando queremos mostrar que uma propriedade não se verifica só temos de dar um contraexemplo.
- Chama-se ainda a atenção para o facto de, nesta tarefa, $g \circ h = h \circ g$.
- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"A composição de funções é uma operação não comutativa.
Se$g \circ h = h \circ g$, g e h dizem-se permutáveis."

(3) Discussão em grupo turma sobre a noção de função inversa (*15 minutos*)

- O professor escreve no quadro a expressão da função f da questão 2 da ficha de trabalho e a expressão $e(x) = \frac{x-1}{2}$ e pergunta "qual o domínio máximo de definição desta função?"
- Com a ajuda dos alunos o professor calcula $e \circ f$ e $f \circ e$ e pergunta"então como podemos classificar estas funções?". Espera-se que os alunos respondam que e e f são permutáveis.
- "Vamos calcular $(e \circ f)(3)$ e $(f \circ e)(-1)$, o que podemos observar?". Discute-se com os alunos a ideia de que estas funções atribuem como imagem o próprio objeto.
- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"A função que a cada objeto x faz corresponder o próprio x, chama-se função identidade.
Se $(e \circ f)(x) = (f \circ e)(x) = x$, e e f dizem-se funções inversas uma da outra."

(4) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C.

- O professor começa por perguntar se houve dúvidas em cada um dos exercícios propostos para T.P.C. Consoante o tempo disponível, o professor pode pedir a um aluno para ir fazer a resolução e explicar ao colega que teve dúvidas; ou pode o professor ir perguntando aos alunos como fizeram e ir registando no quadro.
- A corrigir: tarefas **85** da pág. 99, **tarefas 16 e 17**da pág. 133, **91** da pág. 102 e **tarefas 18 e 19** da pág. 134 do manual.

PLANO DE AULA 5 (25 DE FEVEREIRO DE 2014)

Lição nº106 **Hora:** 9:05 / 9:55 **Sala:** 322 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções–Função inversa.

Sumário:

Esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos para casa.
Resolução e discussão de tarefas do manual.
Definição de função invertível.

Objetivos:

Consolidar a noção de função inversa;
Compreender a noção de função invertível;
Aprender a encontrar a função inversa de uma função.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Resolução de problemas;
Interpretação de enunciados;
Comunicação matemática.

Estrutura da aula:

(7) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(8) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*15 minutos*)

(9) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 102** da pág. 111 do manual (*30 minutos*)

(4) TPC (escrito no quadro e ditado): **tarefa 36** da pág. 145, **tarefa 103** da pág. 111 e **107** da pág. 113 do manual.

Desenvolvimento da Aula:

(2) <u>Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C.</u>

- O professor começa por perguntar se houve dúvidas em cada um dos exercícios propostos para T.P.C. Consoante o tempo disponível, o professor pode pedir a um aluno para ir fazer a resolução e explicar ao colega que teve dúvidas; ou pode o professor ir perguntando aos alunos como fizeram e ir registando no quadro.
- A corrigir: tarefas **19** da pág. 134, **89** da pág. 101, **97 e 98** da pág. 108 do manual.

(3) **Tarefa 102** da pág. 111 do manual (*30 minutos*)

<u>Apresentação da Tarefa 102 da pág. 111 do manual</u>

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 10 minutos para a resolver.
- Distribui-sefolhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

<u>Realização da Tarefa 102 da pág. 111 do manual</u>(*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.

O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Respostas esperadas:
-Questão 102.1: $P(x) = 1{,}40x$
- Questão 102.2: $35 = 1{,}40x \Leftrightarrow x = 25$
Ou $35 \div 1{,}40 = 25$
- Questão 102.3: $x = \frac{P}{1{,}40}$

Possíveis erros e dificuldades:
- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o enunciado. Como forma de desenvolver a autonomia, e visto que não é uma situação complicada, o professor deve apenas questionar “Já leste o enunciado? O que compreendeste sobre a situação?”.
- Caso os alunos não percebam o que é para fazer na questão 102.1, o professor esclarece que é para escrever uma expressão algébrica.

Discussão da Tarefa 102 da pág. 111 do manual(*20 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:
- O professor pede, para cada alínea, a um aluno que tenha a resposta correta para responder oralmente.
- Em seguida, o professor pergunta a outro aluno ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.
- O professor pergunta então: “A correspondência que achámos na questão 102.3 é uma função? Porquê?”. Espera-se que os alunos digam que “sim, porque a cada quantia de dinheiro faz corresponder uma única quantidade de litros de gasolina”.
- “Chamemos-lhe $f(p)$. Como é que fica então a expressão?”. Escreve-se com a ajuda dos alunos que $f(p) = \frac{p}{1{,}40}$.
- “Vamos calcular $f \circ p$ e $p \circ f$”. Faz-se o cálculo com os alunos e pergunta-se “como podemos classificar estas funções?”. Espera-se que os alunos digam que são permutáveis e que são inversas uma da outra.
- De seguida questiona-se a turma “será que a correspondência inversa de uma função é sempre uma função?”. Se os alunos disserem que não, o professor pede um contraexemplo. Se os alunos responderem que sim, o professor escreve no quadro a função $h(x) = x^2$ e questiona: “se quiséssemos estabelecer a correspondência inversa qual seria a imagem de 4?”. O objetivo é levar os alunos a perceber que haveria duas opções para imagem e, como tal, essa correspondência não seria uma função.
- “Então para uma função ter inversa que característica tem de ter?”. Espera-se que os alunos respondam que cada imagem deve ser gerada por um único objeto, ou seja, que a função deve ser injetiva.
- Discute-se com os alunos a ideia de que podemos obter a função inversa pensando na correspondência inversa, ou seja fazendo corresponder as imagens aos objetos.
- Questiona-se ainda “que relação terão o domínio e contradomínio de uma função com os da sua inversa? O que é o domínio de uma função? E o contradomínio”. O objetivo é levar os alunos a perceber que o domínio de função original é o contradomínio da sua inversa e vice-versa porque o domínio de uma função é o conjunto dos seus objetos e o contradomínio é o conjunto das imagens.
- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:
“Uma funçãofé invertível se e só se for injetiva.
Sefé uma função invertível, a sua inversa (denominada por f^{-1})é uma função que tem por domínio D'_f e que faz corresponder a cada elemento do contradomínio de f, o objeto que lhe deu origem”.

PLANO DE AULA 6 (26 DE FEVEREIRO DE 2014)

Lição nº107 **e** 108 **Hora:** 10:15 / 11:55 **Sala:** 209 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções–Função inversa.

Sumário:

Resolução e discussão da ficha de trabalho: "Uma investigação sobre funções inversas".

Propriedade gráfica das funções inversas.

Resolução de tarefas do manual.

Esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos para casa.

Objetivos:

Cimentar os conhecimentos sobre funções inversas;

Compreender que os gráficos de duas funções inversas são simétricos relativamente à reta $y = x$;

Compreender a relação entre o declive de uma função afim injetiva e da sua inversa.

Recursos:

Ficha de trabalho: "Uma investigação sobre funções inversas";

Quadro branco e marcador;

Manual adotado;

Calculadora gráfica;

Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;

Argumentação matemática;

Comunicação matemática.

Estrutura da aula:

(1) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(2) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Ficha de Trabalho: Uma investigação sobre funções inversas** (*55 minutos*)

(3) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 108** da pág. 113 do manual (*25 minutos*)

(4) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*15 minutos*)

(5) TPC (escrito no quadro e ditado): **tarefa 105** da pág. 112, **109** da pág. 113, **20** da pág. 135 e **45** da pág. 147 do manual.

Desenvolvimento da Aula:

(5) Ficha de Trabalho: Uma investigação sobre funções inversas (*55 minutos*)

<u>Apresentação da Ficha de Trabalho</u> (5 minutos)

- Explica-se aos alunos que devem realizar a ficha a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 25 minutos para a resolver.
- Distribui-se a ficha de trabalho e folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

<u>Realização da Ficha de trabalho</u> (*25 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.

O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 1:

Respostas esperadas:

- Os alunos podem usar o algoritmo da divisão de polinómios ou a regra de Ruffini para transformar a expressão $\frac{x-2}{x+1}$ em $1-\frac{3}{x+1}$.
- Outra alternativa é: $1-\frac{3}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{3}{x+1}=\frac{x-2}{x+1}$.
- Devem ainda argumentar que os domínios são iguais.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos optarem pelo algoritmo da divisão e não se lembrarem de como proceder, o professor deve ir auxiliando e relembrando o algoritmo. O mesmo se aplica à regra de Ruffini.
- Se os alunos não mencionarem os domínios, o professor pergunta: "o que é necessário para duas funções serem iguais?".
- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar o domínio das funções, o professor deve perguntar: "Então o que é o domínio de uma função?". Espera-se que os alunos respondam que é"o conjunto dos valores reais para os quais a função está definida", ou de um modo menos formal "o conjunto dos valores de x para os quais a função tem significado". De seguida o professor pergunta: "E para que valores é que uma função racional está definida?". Espera-se que os alunos respondam que "uma função racional está definida para todos os valores reais que não anulem o denominador".

Questão 2:

Respostas esperadas:

a) Interseção com o eixo Ox: $1-\frac{3}{x+1}=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x=2$, ponto $(2,0)$.
   Interseção com o eixo Oy: $1-\frac{3}{0+1}=-2$, ponto $(0,-2)$.
b) Assíntota Horizontal: $y=1$; Assíntota Vertical:$x=-1$;
   Os alunos podem justificar com base no estudo efetuado sobre as funções da família $a+\frac{b}{cx+d}$ ou com argumentos gráficos invocando os limites.
c) Os alunos podem justificar com argumentos gráficos (representando o gráfico da função) ou podem argumentar que a assimptota horizontal é em$y=1$ e, portanto, o contradomínio é $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem não saber como calcular a interseção com os eixos coordenados. O professor deve perguntar "um ponto onde a função interseta o eixo Ox/Oy tem que característica?". O objetivo é levar os alunos a concluir que uma das coordenadas é zero.
- Os alunos podem ter dificuldade em justificar as expressões das assíntotas. O professor deve questionar: "que tipo de função é esta?". O objetivo é levar os alunos a pensar nas características das funções racionais estudadas.
- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar o contradomínio das funções, o professor deve perguntar: "Então o que é o contradomínio de uma função?". Espera-se que os alunos respondam que é "o conjunto dos valores reais para que são imagem de algum objeto".

Questão 3:

Respostas esperadas:

1 - Os alunos podem justificar que a função é invertível afirmando que é injetiva porque as funções racionais da família $a+\frac{b}{cx+d}$ são todas injetivas.

2 – f é invertível porque é injetiva uma vez que a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, como se vê no gráfico (e desenham o gráfico de f).

3 – $y=1-\frac{3}{x+1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x=-1+\frac{3}{-y+1} \Leftrightarrow x=-1-\frac{3}{y-1}$ e esta correspondência é uma função, logo f é invertível.

Para caracterizar a função inversa devem indicar a sua expressão algébrica e o seu domínio.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos não souberem como justificar o professor deve perguntar: na última aula vimos que nem todas as funções eram invertíveis. Que característica têm as funções que são invertíveis?”. O objetivo é fazer os alunos pensar ou na injetividade ou no facto de a correspondência inversa ser uma função.

- Se os alunos não souberem como justificar que é injetiva o professor pergunta: “O que significa uma função ser injetiva?”.

- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar a correspondência inversa, o professor deve incentivá-los a escrever $y = 1 - \frac{3}{x+1}$ e a tentar escrever a expressão em ordem a x.

- Caso os alunos não indiquem o domínio o professor deve perguntar “o que é preciso para caracterizar uma função?”.

Questão 4:

Respostas esperadas:

Os alunos podem recorrer à calculadora gráfica ou aos seus conhecimentos sobre os gráficos das funções racionais.

Questão 5:

Respostas esperadas:

Os alunos podem recorrer a raciocínios semelhantes aos da questão 2 ou usarem a calculadora gráfica para responder às alíneas a), b) e c).

Devem chegar à conclusão que:

a) As coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados “invertem-se”, trocando a coordenada x com a y.
b) A constante da assíntota horizontal passa a ser a da assíntota vertical e vice-versa.
c) O domínio da função é o contradomínio da função inversa e vice-versa.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos tiverem dificuldade em responder à questão o professor deve incentivá-los a primeiro encontrar os pontos de interseção, as assíntotas, o domínio e o contradomínio da função inversa.

- Se os alunos tiverem dificuldade em comparar, o professor deve incentivá-los a tentar encontrar o que é semelhante e o que é diferente.

Questão 6:

Respostas esperadas:

Espera-se que os alunos constatem que os gráficos da função e da sua inversa são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Questão 7: É possível que muitos alunos não cheguem a ter tempo de repetir o estudo para outras funções, mas alguns terão tempo de, pelo menos, introduzir na calculadora gráficos de funções inversas uma da outra e verificar que a propriedade se mantém.

Discussão da Ficha de Trabalho (*25 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Para a questão 1, escolhe-se um aluno que parta de $\frac{x-2}{x+1}$ para chegar a $1 - \frac{3}{x+1}$ e outro que opte pelo contrário salientando que ambas as estratégias estão corretas.

- Para a questão 2 escolhe-se um aluno com a resposta correta.

- Para a questão 3 discute-se oralmente a justificação que menciona a injetividade e a justificação que menciona a correspondência inversa ser uma função salientando que ambas as estratégias estão corretas. Pede-se a um aluno que venha caracterizar a função inversa no quadro e registar também a resposta à questão 4.

- Para a questão 5, pede-se a um aluno que tenha a resposta certa para vir ao quadro. Deve discutir-se a inversão de características entre as funções.

- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Para a questão 6, o professor desenha no referencial da questão 4 a reta pedida e pergunta aos alunos o que concluíram.

- A questão 7 será discutida apenas oralmente perguntando aos alunos que funções testaram e o que verificaram.

- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"O gráfico da uma função e o da sua inversa são simétricos relativamente à reta $y = x$."

(3) Tarefa 108 da pág. 113 do manual (*25 minutos*)

<u>Apresentação da Tarefa 108 da pág. 113 do manual</u>

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 15 minutos para a resolver.

- Distribui-se folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

<u>Realização da Tarefa 108 da pág. 113 do manual</u> (*15 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

<u>Respostas esperadas:</u>

- Os alunos podem produzir uma demonstração, uma prova ou uma justificação. Os alunos devem justificar que uma função afim injetiva tem uma expressão do tipo $y = mx + b$ com $m \neq 0$, ou que o seu gráfico é representado por uma reta oblíqua.

- Exemplo de prova:

$f(x) = mx + b$ é uma função afim

A correspondência inversa é: $y = mx + b \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{m}$

Logo $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{m}$ que é uma função afim e tem declive $\frac{1}{m}$ c.q.d.

- Os alunos podem justificar com um exemplo particular ou recorrendo a argumentos gráficos, alegando que se o gráfico de f é uma reta oblíqua, o gráfico de f^{-1} tem de ser simétrico ao de f relativamente a reta $y = x$ e logo tem de ser uma reta com declive inverso.

<u>Possíveis erros e dificuldades:</u>

- Se os alunos não perceberem o que significa "função afim injetiva" o professor deve perguntar: "qual o aspeto gráfico de uma função afim? As funções afins são sempre injetivas". O objetivo é levar os alunos a pensar numa reta oblíqua.

- Caso os alunos utilizem um exemplo particular, o professor deve deixá-los fazer seguir o raciocínio até ao fim e só depois perguntar "Será que é sempre assim? Podemos fazer para o caso geral?". O objetivo é levar o aluno a usar o exemplo como genérico ou a optar por uma argumentação mais intelectual (sem recorrer a casos particulares).

<u>Discussão da Tarefa 108 da pág. 113 do manual</u> (*10 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Pede-se a um aluno que opte por usar um caso particular ou a justificação gráfica para registar a resposta no quadro e pede-se também a um aluno que tenha produzido uma prova ou demonstração que também registe no quadro a sua resposta.

- Discute-se a abrangência e rigor da segunda resposta face à primeira.

- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Escreve-se, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

"A inversa de uma função afim injetiva é também uma função afim e as retas representativas dos seus gráficos Têm declives inversos."

(4) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C.

- O professor começa por perguntar se houve dúvidas em cada um dos exercícios propostos para T.P.C. Consoante o tempo disponível, o professor pode pedir a um aluno para ir fazer a resolução e explicar ao colega que teve dúvidas; ou pode o professor ir perguntando aos alunos como fizeram e ir registando no quadro.

- A corrigir: **tarefa 101** da pág. 109, **36** da pág. 145, e **95** da pág. 104, **tarefa 89** da pág. 101, **103** da pág. 111 e **107** da pág. 113 do manual.

PLANO DE AULA 7 (12 DE MARÇO DE 2014)

Lição nº112 **e** 113 **Hora:** 10:15 / 11:55 **Sala:** 209 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Função com radicais.

Sumário:

Esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos para casa.
Definição de raiz de índice n.
Revisão sobre operações com radicais.
Funções com radicais.
Resolução de tarefas do manual.

Objetivos:

Compreender a definição de raiz índice n de um número real (perceber que se n for par, só podemos definir para números reais positivos);
Rever as regras de operações com radicais;
Compreender a definição de função com radicais/irracional;
Estudar algumas características destas funções (com ênfase no domínio).

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Resolução de problemas;
Argumentação matemática;
Raciocínio matemático;
Domínio de cálculo.

Estrutura da aula:

(1) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(2) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*15 minutos*)

(3) Introdução sobre a definição de raiz de índice n (*5 minutos*)

(4) Resolução a pares e discussão em grupo-turma das primeiras quatro alíneas da **Tarefa 116** da pág. 118 do manual (*30 minutos*)

(5) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 118** da pág. 119 do manual (*15 minutos*)

(6) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 46** da pág. 148 do manual (*30 minutos*)

(7) TPC (escrito no quadro e ditado): acabar a **tarefa 116** da pág. 118, **112 e 113** da pág. 117 e **117** da pág. 118 do manual.

Desenvolvimento da Aula:

(2) <u>Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C.</u>

- O professor começa por perguntar se houve dúvidas em cada um dos exercícios propostos para T.P.C. Consoante o tempo disponível, o professor pode pedir a um aluno para ir fazer a resolução e explicar ao colega que teve dúvidas; ou pode o professor ir perguntando aos alunos como fizeram e ir registando no quadro.

- A corrigir: **103** da pág. 111, **107** da pág. 113, **105** da pág. 112, **109** da pág. 113, **20** da pág. 135 e **45** da pág. 147 do manual.

(3) Introdução sobre a definição de raiz índice n (*5 minutos*)

- O professor pergunta aos alunos: “O que é a raiz quadrada de um número real?”. Espera-se que os alunos respondam que é “o número que ao quadrado dá esse valor”.

- Escreve-se no quadro com a ajuda dos alunos: "$\sqrt{x}$ é um número real y tal que $y^2 = x$";
- O professor pergunta ainda: "Então como podemos definir a raiz cúbica?". Discute-se este caso apenas oralmente, uma vez que se vai definir o caso geral.
- Em seguida pergunta-se aos alunos: "Para que valores reais faz sentido definir a raiz quadrada? E a raiz cúbica?". Discute-se este aspeto salientando a paridade do índice da raiz.
- "Podemos generalizar estas definições para qualquer índice da raiz?"
- Escreve-se então, com a ajuda dos alunos, a seguinte definição:
"Chamamos raiz índice n de um número real x (e escrevemos $\sqrt[n]{x}$) a um número real y tal que $y^n = x$"
Se n for par, considera-se que $x \in \mathbb{R}_0^+$";

(4) Tarefa 116 da pág. 118 do manual (*30 minutos*)

Apresentação da Tarefa 116 da pág. 118 do manual (5 minutos)

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 10 minutos para a resolver.
- Distribui-se folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

116. Sem recorrer à calculadora, mostra que:

116.1 $\sqrt{5} + 2\sqrt{45} - \sqrt{80} = 3\sqrt{5}$

116.2 $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{18}{75}} = \frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$

116.3 $(2\sqrt{2} - 1)^2 \times (9 + 4\sqrt{2}) = 49$

116.4 $\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{150} = 10\sqrt[3]{3}$

116.5 $\sqrt[3]{0{,}000\,001 \times 216} = 0{,}06$

116.6 $\sqrt{6 - 3\sqrt{2}} \times \sqrt{6 + 3\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

Realização das primeiras quatro alíneas da Tarefa 116 da pág. 118 do manual (*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Respostas esperadas:

- Os alunos devem fatorizar os radicandos de forma a simplificar cada uma das raízes e/ou usar as regras de operações com raízes.
- Na questão 116.3 os alunos podem efetuar $(2\sqrt{2} - 1) \times (2\sqrt{2} - 1)$ ou usar o desenvolvimento do quadrado do binómio.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem somar radicandos para efetuar a soma de raízes. O professor deve chamar a atenção para o erro exemplificando, se necessário com o caso $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.
- Caso os alunos não se lembrem que podem simplificar raízes fatorizando os radicandos, o professor deve questionar "não há uma forma mais simples de escrever esta raiz?".

- Caso os alunos tenham dificuldade em simplificar as raízes depois de fazerem a factorização. O professor deve incentivá-los a escrever a raiz com o numero escrito como produto de fatores primos e pensar no produto das raízes. Exemplo: $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

- Se os alunos não se lembrarem das regras operatórias com raízes, o professor deve incentivá-los a discutir com o colega do lado ou a procurar no manual.

<u>Discussão das primeiras quatro alíneas da Tarefa 116 da pág. 118 do manual</u> (*15 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Para cada alínea o professor pede a um aluno que tenha a resolução correta para ir ao quadro. A não ser que haja algum erro de cálculo recorrente e, nesse caso, chama-se um aluno com esse erro para poder discuti-lo com a turma.

- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Ao longo da discussão vai-se pedindo aos alunos que enunciem as regras operatórias usadas.

(5) Tarefa 118 da pág. 119 do manual (*15 minutos*)

<u>Apresentação da Tarefa 118 da pág. 119 do manual</u>

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 10 minutos para a resolver.

- Pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

118. Em relação ao retângulo [*ABCD*] representado na figura, sabe-se que:

- a área é $\sqrt{40}$ m²
- $\overline{AD} = \sqrt{5}$ m

Mostra que o perímetro do retângulo é igual a $(4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ m .

<u>Realização da Tarefa 118 da pág. 119 do manual</u> (*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.

O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.

O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.

As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

<u>Resposta esperada:</u>

- Sabemos que $A_{\square} = c \times l$. Assim $\sqrt{40} = \sqrt{5} \times \overline{AB} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{8}$. Simplificando a raiz quadrada obtemos $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$.

Então $P_{\square} = 2 \times 2\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ c.q.d.

<u>Possíveis erros e dificuldades:</u>

- Se os alunos não souberem como abordar o problema, o professor pergunta: "Como se calcula o perímetro de um retângulo?". O objetivo é levar os alunos a perceber que têm de conhecer o comprimento e a largura.

- Caso os alunos não simplifiquem as raízes, vão obter uma expressão diferente da que se quer encontrar. Nesse caso o professor pergunta: "Essa expressão não pode ser mais simplificada?"

- É de esperar que alguns alunos façam arredondamentos ao longo da resolução. Deve chamar-se a atenção para o facto do enunciado não pedir arredondamentos e relembrar que por defeito devemos trabalhar com valores exatos.

- Se os alunos tiverem dificuldade na escrita simbólica, nomeadamente escreverem AB em vez de $\overline{AB}$, o professor deve chamar a atenção para o erro focando a diferença entre a notação de reta e de comprimento do segmento de reta.

Discussão da Tarefa 118 da pág. 119 do manual (*5 minutos*)
A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Pede-se a um aluno que tenha a resolução correta para resolver no quadro.

- Depois do aluno registar no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

(6) **Tarefa 46** da pág. 148 do manual (*30 minutos*)

Apresentação da Tarefa 46 da pág. 148 do manual

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 15 minutos para a resolver e que devem justificar as respostas dadas.

- Pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

Realização da Tarefa 46 da pág. 148 do manual (*15 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 1:
Resposta esperada:

- $x \in]0,10[$, porque há dois lados que medem x, logo temos de considerar metade de 20 e o intervalo tem de ser aberto para não haver um lado de medida nula.

Possíveis erros e dificuldades:

- É de esperar que alguns alunos considerem o intervalo fechado. Neste caso o professor deve perguntar: "Faz sentido um dos lados do retângulo medir 0?". Pretende-se que os alunos percebam que esta situação aconteceria quer x medisse 0 quer medisse 10.

- Se os alunos escreverem $x \leq 9$, o professor deve perguntar "E o lado tem de ser um valor inteiro?".

- Se algum aluno escrever que $x \in]0,20[$ o professor deve perguntar "se x for $19cm$, qual a largura do retângulo?".

- Também é possível que dividam 20 por 4 e concluam que $x \in]0,5]$. O professor deve então questionar: "No caso de x ser $5cm$, qual a largura do retângulo? E esse não poderia ser o valor do comprimento e vice-versa?".

Questão 2:
Resposta esperada:

- Usando o Teorema de Pitágoras: $d^2 = x^2 + \left(\frac{20-2x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{2x^2 - 20x + 100}$. Como o comprimento da diagonal tem de ser positivo vem $d = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$ c.q.d.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem não saber como abordar a questão. O professor deve sugerir olhar para o triângulo formado pela diagonal e dois lados do retângulo e pergunta "Que tipo de triângulo é este?" "Como se pode encontrar a medida de um dos lados de um triângulo desse tipo?". O objetivo é fazê-los pensar no Teorema de Pitágoras.

- Os alunos podem ter dificuldade em escrever a largura em função do comprimento ou usarem outra letra para a designar. O professor deve perguntar "Qual o perímetro do retângulo? Como podemos obter a largura se soubermos o comprimento?".

- Se algum aluno não identificar as duas soluções da equação, o professor deve chamar a atenção para esse facto.

<u>Questão 3.1:</u>
<u>Resposta esperada:</u>

- Os alunos devem inserir a função na calculadora gráfica e encontrar a imagem de 0 e de 10 verificando que é 10. Depois usam a função CALC para encontrar o valor mínimo de d. Devem indicar que estão a fazer uma aproximação quando apresentarem a resposta.

<u>Possíveis erros e dificuldades:</u>

- Os alunos podem não se lembrar como encontrar a imagem de um ponto ou o valor mínimo da função com a calculadora. O professor deve dar toda a assistência técnica necessária.
- É possível que alguns alunos deem como resposta o intervalo $[7{,}07;+\infty[$. Neste caso, o professor deve questionar: "é possível, num retângulo com $20cm$ de perímetro ter uma diagonal que meça por exemplo $100cm$?".
- Os alunos podem ter dúvidas quanto à janela a utilizar para visualizar o gráfico. O professor deve sugerir que tenham em conta o contexto do problema e que experimentem com alguns valores para ver qual a mais adequada.

<u>Discussão da Tarefa 46 da pág. 148 do manual</u> (15 *minutos*)
A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Para cada questão, o professor pede a um aluno que tenha a resposta correta para ir fazer a resolução ao quadro.
- Depois do aluno registar no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.
- No caso da questão 1, depois de explicada a resposta dada, devem discutir-se as diferentes ideias erradas que os pares tiverem explorado e que o professor tenha identificado.
- No caso da questão 3.1. deve ser representado, pelo aluno que for ao quadro, um esboço do gráfico visualizado na calculadora chamando atenção para o domínio no contexto do problema, a janela utilizada e assinalando os pontos relevantes para a questão.
- O professor discute com os alunos a ideia de que uma função com radicais/irracional é uma função em que a variável faz parte do radicando de uma raiz de índice n.
- O professor pergunta aos alunos: "qual o domínio máximo de definição da função d?". Espera-se que os alunos respondam que é $\mathbb{R}$, uma vez que já viram o gráfico na calculadora.
- O professor escreve no quadro $f(x) = \sqrt{x-3}$ e pergunta "E qual o domínio máximo de definição desta função?". Discute-se com os alunos usando alguns exemplos particulares para os levar a compreender que o radicando tem de ser maior ou igual a zero. Discute-se também o caso da função $g(x) = \sqrt[3]{x-3}$.
- Escreve-se com a ajuda dos alunos a seguinte síntese:

" Uma função com radicais (ou irracional) é uma função em que a variável faz parte do radicando de uma raiz de índice n $(n \geq 2)$.

Se n for ímpar, o radicando pode ser qualquer número real.

Se n for par, o radicando tem de ser maior ou igual a zero."

PLANO DE AULA 8 (17 DE MARÇO DE 2014)

Lição nº114 **e** 115 **Hora:** 10:15 / 11:55 **Sala:** 320 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Funções com radicais.

Sumário:

Finalização da discussão da aula anterior.
Funções com radicais.
Potências de expoente racional.
Implicação e equivalência.
Equações com radicais.
Resolução de tarefas do manual.
Esclarecimento de dúvidas sobre os trabalhos para casa.

Objetivos:

Compreender a definição de função com radicais/irracional;
Estudar algumas características destas funções (com ênfase no domínio);
Compreender a definição de potência de expoente fracionário;
Rever a diferença entre equivalência e implicação;
Resolver equações com radicais e confirmar as soluções por experimentação.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Comunicação matemática;
Argumentação matemática;
Raciocínio matemático;
Estabelecimento de conexões.

Estrutura da aula:

(1) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(2) Finalização da discussão em grupo-turma da **Tarefa 46** da pág. 148 do manual (*10 minutos*)

(3) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 112** e das primeiras 3 alíneas da **Tarefa 113** da pág. 117 do manual (*15 minutos*)

(4) Introdução sobre as potências de expoente racional (*5 minutos*)

(5) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 122** da pág. 121 do manual (*15 minutos*)

(6) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 32** da pág. 125 do manual (*35 minutos*)

(7) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C. da aula anterior (*15 minutos*)

(8) TPC (escrito no quadro e ditado): acabar a **tarefa 113** da pág. 117, **125** da pág. 123 e **129** da pág. 127 do manual.

Desenvolvimento da Aula:

(2) Finalização da discussão em grupo-turma da **Tarefa 46** da pág. 148 do manual (*10 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- O professor regista com a ajuda dos alunos a resposta dada às questões 2 e 3.1. A questão 3.2 será apenas mencionada oralmente.
- O professor discute com os alunos a ideia de que uma função com radicais/irracional é uma função em que a variável faz parte do radicando de uma raiz de índice n.

- O professor pergunta aos alunos: "qual o domínio máximo de definição da função d?". Espera-se que os alunos respondam que é $\mathbb{R}$, uma vez que já viram o gráfico na calculadora.

- O professor escreve no quadro $f(x) = \sqrt{x-3}$ e pergunta "E qual o domínio máximo de definição desta função?". Discute-se com os alunos usando alguns exemplos particulares para os levar a compreender que o radicando tem de ser maior ou igual a zero. Discute-se também o caso da função $g(x) = \sqrt[3]{x-3}$.

- Escreve-se com a ajuda dos alunos a seguinte síntese:

" Uma função com radicais (ou irracional) é uma função em que a variável faz parte do radicando de uma raiz de índice n $(n \geq 2)$.

Se n for ímpar, o radicando pode ser qualquer número real.

Se n for par, o radicando tem de ser maior ou igual a zero."

(3) Tarefa 112 e primeiras 3 alíneas da **Tarefa 113** da pág. 117 do manual (*15 minutos*)

Apresentação das Tarefas 112 e 113 da pág. 117 do manual

- Explica-se aos alunos que devem realizar as tarefas a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 10 minutos para as resolver (referindo que da questão 113 só serão discutidas as três primeiras alíneas e as outras ficarão para TPC de quem não tiver tempo de as realizar em aula).

- Distribui-se folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam as tarefas em silêncio e comecem a resolvê-la.

- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

112. Das funções a seguir apresentadas, indica as que são irracionais.

112.1 $f: x \longrightarrow 1 + \sqrt{3x}$

112.2 $g: x \longrightarrow \sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 1$

112.3 $h: x \longrightarrow 2 + \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

112.4 $i: x \longrightarrow 2 + \sqrt{\dfrac{x}{3}}$

113. Determina o domínio das funções f tais que:

113.1 $f(x) = \sqrt{1-2x}$

113.2 $f(x) = x - \sqrt{-x}$

113.3 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

113.4 $f(x) = \sqrt{4-2x^2}$

113.5 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

113.6 $f(x) = \sqrt{4x^2+4x+1}$

113.7 $f(x) = 2 + \sqrt{x^2-x-2}$

Realização das Tarefas 112 e 113 da pág. 117 do manual (*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.

O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.

O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.

As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Respostas esperadas:

Questão 112 - Os alunos devem usar a definição função com radicais e assinalar as funções: f e i.

Questão 113.1 - $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 1 - 2x \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \leq \frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$;

Questão 113.2 - $D_f = \{x \in \mathbb{R}: -x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\} = \mathbb{R}_0^-$;

Questão 113.3 - $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \geq 0 \land x + 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 > 0\} =]-3; +\infty[$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos tiverem dificuldade em identificar as funções com radicais, o professor deve incentivá-los a reler a definição e discutirem entre si.

- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar os domínios, o professor deve questionar "Para que valores é que a função tem significado? Que restrições existem ao domínio de uma função com radicais?".

- Espera-se que a maioria dos alunos resolvam primeiro as inequações e escrevam o domínio sob a forma de intervalo sem definirem o conjunto por separação ($\{x \in \mathbb{R}: -x \geq 0\}$). Caso haja alunos a quem sobre tempo, o professor deve incentivar a tentar escrever o domínio na forma$\{x \in \mathbb{R}: ...\}$.

<u>Discussão das Tarefas 112 e 113 da pág. 117 do manual</u> (*5 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- A questão 112 será discutida oralmente salientando a definição de função com radicais e indicando e fundamentando de que tipo são as outras funções.

- Para cada alínea da questão 113, o professor pede a um aluno que tenha a resolução correta para ir ao quadro.

- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

(4) Introdução sobre as potências de expoente racional (*5 minutos*)

- O professor escreve no quadro o título "Potências" seguido de a^n e pergunta aos alunos: "O que sabem sobre potências?". Espera-se que os alunos falem em base, expoente, número multiplicado por si próprio, regras das potências, entre outros.

- Escreve-se no quadro com a ajuda dos alunos: "Exemplo: $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$";

- O professor pergunta aos alunos: "Então e se o expoente for 0?". Discute-se este caso apenas oralmente.

- Em seguida pergunta-se aos alunos: "E se o expoente for um número negativo?". O professor escreve com a ajuda dos alunos: "Exemplo: $3^{-1} = \frac{1}{3}$";

- "Mas porque é que definimos assim?". O professor escreve no quadro: "$3^{-1} \times 3 =$" e pergunta "Usando as regras das potências qual o resultado desta operação?". O objetivo é que os alunos percebam que para que o resultado seja um, a potência tem de valer $\frac{1}{3}$.

- "Então vamos tentar definir quanto deve ser $3^{\frac{1}{2}}$ de forma a que as regras de potências se mantenham!" Escreve-se no quadro $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$ e pergunta-se: "Usando as regras das potências qual o resultado desta operação?". Escreve-se então com a ajuda dos alunos $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$ e questiona-se: "para que esta igualdade seja verdadeira qual deve ser o valor de $3^{\frac{1}{2}}$? Qual o número que ao quadrado dá 3?".

- Explora-se os seguintes exemplos: $5^{\frac{1}{3}}$, $7^{-\frac{1}{2}}$ e $2^{\frac{5}{2}}$.

- "Podemos generalizar estas definições para qualquer expoente fracionário?"

- Escreve-se então, com a ajuda dos alunos, a seguinte definição:

"Definimos potência de expoente racional da seguinte forma:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \text{ e } a \neq 0."$$

- O professor escreve três exemplos de potências com expoente fracionário e pede a alguns alunos da turma para dizerem como fica o mesmo número escrito com raízes e porquê, e em seguida escreve três exemplos de radicais e pede a outros alunos para dizerem como se pode escrever o mesmo número em forma de potência de expoente racional.

(5) **Tarefa 122** da pág. 121 do manual (*15 minutos*)

<u>Apresentação da Tarefa 122 da pág. 121 do manual</u>

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 10 minutos para a resolver.

- Distribui-se folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

- Chama-se a atenção para a necessidade da resolução a caneta e de não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

Realização da Tarefa 122 da pág. 121 do manual (*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Resposta esperada:

- Os alunos devem usar a definição potência de expoente racional para transformar os expoentes em raízes e vice versa.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos tiverem dificuldade em trabalhar com a função por ramos, o professor deve questionar "Que tipo de função é esta? Como sabemos qual dos ramos usar para determinar a imagem?".
- Se os alunos tiverem dificuldade em calcular as imagens, o professor deve incentivar a usar a definição de potência de expoente racional para transformar as raízes em expoentes. E ainda assim os alunos não souberem como calcular o professor deve incentivar a usar as regras das potências.

Discussão da Tarefa 122 da pág. 121 do manual (*5 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Para cada alínea o professor pede a um aluno que tenha a resolução correta para ir ao quadro. A não ser que haja algum erro de cálculo recorrente e, nesse caso, chama-se um aluno com esse erro para poder discuti-lo com a turma.
- Depois dos alunos registarem no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.
- Ao longo da discussão, pede-se aos alunos para referirem as regras operatórias usadas.

(5) Tarefa 32 da pág. 125 do manual (*35 minutos*)

Apresentação da Tarefa 32 da pág. 125 do manual

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 20 minutos para a resolver.
- Pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

Realização da Tarefa 32 da pág. 125 do manual (*20 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 1:

Respostas esperadas:

1.1 – Sim, porque se os valores são iguais, os seus quadrados serão iguais.

1.2 e 1.3 – Não, porque por exemplo $-3 \neq 3$ e $(-3)^2 = 3^2$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em justificar formalmente as suas respostas. O professor deve incentivá-los a explicar "por palavras suas" a sua resposta.

- Os alunos podem ficar confusos com a questão 1.3 e achar que na 1.2 devem dar outra justificação que não seja um contra-exemplo. O professor deve esclarecer que podem responder às questões 1.2 e 1.3 simultaneamente.

- Se os alunos responderem que sim à questão 1.2 o professor deve deixá-los continuar porque ao resolverem a 1.3 vão perceber que se enganaram.

Questão 2.1:

Resposta esperada:

- Para que o comprimento do fio seja mínimo o ponto C deve coincidir com o ponto B e para que seja máximo deve coincidir com o ponto D, porque sabemos que $\overline{AC} < \overline{AD} + \overline{DC}$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem não saber como abordar a questão ou como justificar. O professor deve sugerir olhar para o triângulo formado pelos segmentos de reta $[AC]$, $[AD]$ e $[DC]$ e pergunta "O lado $[AC]$ pode ser maior que a soma dos outros dois? À medida que movemos C para uma posição mais próxima de D o que acontece ao comprimento do fio?".

Questão 2.2.1:

Resposta esperada:

- Usando o Teorema de Pitágoras $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{9 + x^2}$. Como o comprimento do segmento tem de ser positivo vem $\overline{AC} = \sqrt{9 + x^2}$.

- $\overline{CB} = \overline{DB} - \overline{DC} = 5 - x$

- Assim, $f(x) = \overline{AC} + \overline{CB} = \sqrt{9 + x^2} + 5 - x$ c.q.d.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos tiverem dificuldade em determinar $\overline{AC}$, o professor deve sugerir olhar para o triângulo formado pelos segmentos de reta $[AC]$, $[AD]$ e $[DC]$ e pergunta "Que tipo de triângulo é este?" "Como se pode encontrar a medida de um dos lados de um triângulo desse tipo?". O objetivo é fazê-los pensar no Teorema de Pitágoras.

- Se algum aluno não identificar as duas soluções da equação, o professor deve chamar a atenção para esse facto.

- Se os alunos tiverem dificuldade em determinar $\overline{CB}$, o professor deve questionar: "Qual a medida de $\overline{DB}$? Como podemos escrever a medida de $\overline{CB}$ à custa desta?"

Questão 2.2.2:

Resposta esperada:

- Os alunos devem encontrar a janela adequada e introduzir a expressão da função na calculadora e definir $Y_2 = 7$. Depois usam a funcionalidade intersect para determinar o valor pretendido. Informa-se os alunos de que devem apresentar um esboço do gráfico na folha de resposta, assinalando os pontos relevantes (tal como fazem nos testes de avaliação sumativa).

Possíveis erros e dificuldades:

- Caso os alunos não se lembrem como proceder para encontrar um objeto com uma determinada imagem com a calculadora gráfica, o professor deve incentivá-los a discutir com o colega e, caso nenhum dos dois saiba, o professor refere a ideia de criar uma função constante de valor 7 e encontrar a interseção das duas.

- Os alunos podem não se lembrar como encontrar a interseção de dois gráficos com a calculadora. O professor deve dar toda a assistência técnica necessária.

- Os alunos podem ter dúvidas quanto à janela a utilizar para visualizar o gráfico. O professor deve sugerir que tenham em conta o contexto do problema e que experimentem com alguns valores para ver qual a mais adequada.

Questão 2.2.3:

Resposta esperada:

- $f(1{,}6) = \sqrt{9 + 1{,}6^2} + 5 - 1{,}6 = 6{,}8$. Se $\overline{DC} = 1{,}6m$, então o comprimento do fio será $6{,}8m$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o resultado no contexto do enunciado. Como forma de desenvolver a autonomia, e visto que não é uma situação complicada, o professor deve apenas questionar "Já leste o enunciado? O que representa x? e a função f?".

Questão 2.2.4:

Resposta esperada:

- Os alunos devem preencher os espaços, obtendo $x = 4$ e depois verificar que esta é a solução da equação.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em preencher os espaços por acharem que só podem escrever um termo em cada espaço. O professor deve esclarecer que num espaço pode estar uma expressão mais complexa.

Discussão da Tarefa 32 da pág. 125 do manual (15 *minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- O professor escolhe, para cada questão, um aluno para registar no quadro a sua resposta, tendo em conta os seguintes critérios:

Questões 1 e 2.2.3 – Preferencialmente um aluno com baixa classificação ou que participe pouco (pois o nível de dificuldade desta questão é baixo), para que consiga explicar o que fez sem se atrapalhar, motivando-o para continuar a trabalhar. Na questão 1 deve ser salientada a leitura do sinal de implicação.

Questão 2.1 – Discutida oralmente com a turma.

Questões 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.4 – Um aluno que tenha a resposta correta e completa.

- Depois do aluno registar no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Escreve-se com a ajuda dos alunos a seguinte síntese:

"Temos que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ mas $a = b \nLeftarrow a^2 = b^2$, logo quando elevamos ambos os membros de uma equação ao quadrado, não obtemos uma equação equivalente e, por isso devemos usar o sinal de implicação e temos de verificar se os valores obtidos são solução da equação original."

(6) Esclarecimento de dúvidas sobre o T.P.C.

- O professor começa por perguntar se houve dúvidas em cada um dos exercícios propostos para T.P.C. Consoante o tempo disponível, o professor pode pedir a um aluno para ir fazer a resolução e explicar ao colega que teve dúvidas; ou pode o professor ir perguntando aos alunos como fizeram e ir registando no quadro.

- A corrigir: tarefas **109** da pág. 113, **20** da pág. 135, **45** da pág. 147, acabar a **116** da pág. 118 e **117** da pág. 118 do manual.

PLANO DE AULA 9 (18 DE MARÇO DE 2014)

Lição nº116 **Hora:** 9:05 / 9:55 **Sala:** 322 **Turma:** 11º B

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Funções com radicais.

Sumário:

Implicação e equivalência.
Equações com radicais.
Resolução de tarefas do manual.

Objetivos:

Rever a diferença entre equivalência e implicação;
Resolver equações com radicais e confirmar as soluções por substituição;
Estudar as funções com radicais como inversas das funções potência.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Manual adotado;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Comunicação matemática;
Argumentação matemática;
Raciocínio matemático;
Estabelecimento de conexões.

Estrutura da aula:

(1) Início da aula: número das lições, data e sumário (ditados) (5 *minutos*)

(2) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 32** da pág. 125 do manual (*25 minutos*)

(3) Resolução a pares e discussão em grupo-turma da **Tarefa 124** da pág. 123 do manual (*20 minutos*)

(4) TPC (escrito no quadro e ditado): **tarefa 110** da pág. 116, **134** da pág. 128 do manual.

Desenvolvimento da Aula:

(2) **Tarefa 32** da pág. 125 do manual (*25 minutos*)

Apresentação da Tarefa 32 da pág. 125 do manual

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 15 minutos para a resolver.
- Distribui-se folhas em branco para resposta e pede-se aos alunos que leiam as tarefas em silêncio e comecem a resolvê-la.
- Chama-se a atenção para o facto de deverem fazer a resolução a caneta e não apagarem o que forem fazendo, mesmo que mudem de estratégia entretanto. Neste caso devem assinalar (sem riscar) que está errada e fazem ao lado.

Realização da Tarefa 32 da pág. 125 do manual (*15 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.
O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.
O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.
As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 1:
Respostas esperadas:
1.2 – Sim, porque se os valores são iguais, os seus quadrados serão iguais.
1.2 e 1.3 – Não, porque por exemplo $-3 \neq 3$ e $(-3)^2 = 3^2$.
Possíveis erros e dificuldades:
- Os alunos podem ter dificuldade em justificar formalmente as suas respostas. O professor deve incentivá-los a explicar "por palavras suas" a sua resposta.
- Os alunos podem ficar confusos com a questão 1.3 e achar que na 1.2 devem dar outra justificação que não seja um contraexemplo. O professor deve esclarecer que podem responder às questões 1.2 e 1.3 simultaneamente.
- Se os alunos responderem que sim à questão 1.2 o professor deve deixá-los continuar porque ao resolverem a 1.3 vão perceber que se enganaram.

Questão 2.1:
Resposta esperada:
- Para que o comprimento do fio seja mínimo o ponto C deve coincidir com o ponto B e para que seja máximo deve coincidir com o ponto D, porque sabemos que $\overline{AC} < \overline{AD} + \overline{DC}$.
Possíveis erros e dificuldades:
- Os alunos podem não saber como abordar a questão ou como justificar. O professor deve sugerir olhar para o triângulo formado pelos segmentos de reta $[AC]$, $[AD]$ e $[DC]$ e pergunta "O lado $[AC]$ pode ser maior que a soma dos outros dois? À medida que movemos C para uma posição mais próxima de D o que acontece ao comprimento do fio?".

Questão 2.2.1:
Resposta esperada:
- Usando o Teorema de Pitágoras $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{9+x^2}$. Como o comprimento do segmento tem de ser positivo vem $\overline{AC} = \sqrt{9+x^2}$.
- $\overline{CB} = \overline{DB} - \overline{DC} = 5 - x$
- Assim, $f(x) = \overline{AC} + \overline{CB} = \sqrt{9+x^2} + 5 - x$ c.q.d.
Possíveis erros e dificuldades:
- Se os alunos tiverem dificuldade em determinar $\overline{AC}$, o professor deve sugerir olhar para o triângulo formado pelos segmentos de reta $[AC]$, $[AD]$ e $[DC]$ e pergunta "Que tipo de triângulo é este?" "Como se pode encontrar a medida de um dos lados de um triângulo desse tipo?". O objetivo é fazê-los pensar no Teorema de Pitágoras.
- Se algum aluno não identificar as duas soluções da equação, o professor deve chamar a atenção para esse facto.
- Se os alunos tiverem dificuldade em determinar $\overline{CB}$, o professor deve questionar: "Qual a medida de $\overline{DB}$? Como podemos escrever a medida de $\overline{CB}$ à custa desta?"

Questão 2.2.2:
Resposta esperada:
- Os alunos devem encontrar a janela adequada e introduzir a expressão da função na calculadora e definir $Y_2 = 7$. Depois usam a funcionalidade intersect para determinar o valor pretendido. Informa-se os alunos de que devem apresentar um esboço do gráfico na folha de resposta, assinalando os pontos relevantes (tal como fazem nos testes de avaliação sumativa).
Possíveis erros e dificuldades:
- Caso os alunos não se lembrem como proceder para encontrar um objeto com uma determinada imagem com a calculadora gráfica, o professor deve incentivá-los a discutir com o colega e, caso nenhum dos dois saiba, o professor refere a ideia de criar uma função constante de valor 7 e encontrar a interseção das duas.
- Os alunos podem não se lembrar como encontrar a interseção de dois gráficos com a calculadora. O professor deve dar toda a assistência técnica necessária.
- Os alunos podem ter dúvidas quanto à janela a utilizar para visualizar o gráfico. O professor deve sugerir que tenham em conta o contexto do problema e que experimentem com alguns valores para ver qual a mais adequada.

Questão 2.2.3:
Resposta esperada:
- $f(1{,}6) = \sqrt{9 + 1{,}6^2} + 5 - 1{,}6 = 6{,}8$. Se $\overline{DC} = 1{,}6m$, então o comprimento do fio será $6{,}8m$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em interpretar o resultado no contexto do enunciado. Como forma de desenvolver a autonomia, e visto que não é uma situação complicada, o professor deve apenas questionar "Já leste o enunciado? O que representa x? e a função f?".

Questão 2.2.4:

Resposta esperada:

- Os alunos devem preencher os espaços, obtendo $x = 4$ e depois verificar que esta é a solução da equação.

Possíveis erros e dificuldades:

- Os alunos podem ter dificuldade em preencher os espaços por acharem que só podem escrever um termo em cada espaço. O professor deve esclarecer que num espaço pode estar uma expressão mais complexa.

Discussão da Tarefa 32 da pág. 125 do manual (1*0 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- O professor escolhe, para cada questão, um aluno para registar no quadro a sua resposta, tendo em conta os seguintes critérios:

Questões 1 e 2.2.3 – Preferencialmente um aluno com baixa classificação ou que participe pouco (pois o nível de dificuldade desta questão é baixo), para que consiga explicar o que fez sem se atrapalhar, motivando-o para continuar a trabalhar. Na questão 1 deve ser salientada a leitura do sinal de implicação.

Questão 2.1 – Discutida oralmente com a turma.

Questões 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.4 – Um aluno que tenha a resposta correta e completa.

- Depois do aluno registar no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Escreve-se com a ajuda dos alunos a seguinte síntese:

"Temos que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ mas $a = b \nLeftarrow a^2 = b^2$, logo quando elevamos ambos os membros de uma equação ao quadrado, não obtemos uma equação equivalente e, por isso devemos usar o sinal de implicação e temos de verificar se os valores obtidos são solução da equação original."

(3) **Tarefa 124** da pág. 123 do manual (*20 minutos*)

Apresentação da Tarefa 124 da pág. 123 do manual

- Explica-se aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão 10 minutos para a resolver.
- Pede-se aos alunos que leiam a tarefa em silêncio e comecem a resolvê-la.

Realização da Tarefa 124 da pág. 123 do manual (*10 minutos*)

Os alunos trabalham autonomamente e o professor circula pelos grupos para se certificar de que todos estão a trabalhar na tarefa, esclarecer pequenas dúvidas e para se aperceber do seu progresso de forma a preparar a organização da discussão final em grupo-turma, selecionando os trabalhos a apresentar.

O professor deve ainda incentivar os grupos que estiverem bloqueados nalguma questão a recomeçar o seu raciocínio de outra forma ou a explorarem outros caminhos; e os que terminarem mais cedo a aprimorarem o rigor das suas respostas.

O professor deve intervir questionando os alunos para que expressem melhor o seu pensamento, mas nunca desviando a sua linha de raciocínio nem validando ou não o que estão a fazer.

As dúvidas são esclarecidas nos grupos, a menos que a mesma seja evidenciada por vários grupos, caso em que deve ser devolvida à turma para que sejam os próprios alunos a esclarecê-la.

Questão 124.1

Respostas esperadas:

- $D_f = [-2, +\infty[$, porque $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.
- $D_g = \mathbb{R}$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar o domínio da função f, o professor deve perguntar: "Então o que é o domínio de uma função?". Espera-se que os alunos respondam que é "o conjunto dos valores reais para os quais a função está definida", ou de um modo menos formal "o conjunto dos valores de x para os quais a função tem significado". De seguida o professor pergunta: "E o que se deve verificar para que uma função com uma raiz quadrada esteja definida?". Espera-se que os alunos respondam que "o radicando deve ser maior ou igual a zero".

- Caso os alunos respondam que o domínio da função g é $\mathbb{R}_0^+$ o professor deve questionar "Existe raiz cúbica de -1? Quanto é?". O objetivo é levar os alunos a compreender que, nas raízes de índice ímpar, o radicando pode ser qualquer número real.

Questão 124.2

Respostas esperadas:

124.2.1 - $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(\sqrt[3]{-1}) = \cdots = 1$ e $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(\sqrt[2]{1}) = \cdots = 1$.

124.2.2 - $g(-3) \times f(1) = \sqrt[3]{-3} \times \sqrt{3} = (-3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = -3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} = -3^{\frac{5}{6}}$.

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos tiverem dificuldade em encontrar a imagem pela função composta, o professor deve questionar "Como podemos escrever $(f \circ g)(-1)$ de outra forma?". O Objetivo é levar os alunos a pensar em $f(g(-1))$.

- Caso os alunos tenham dificuldade em simplificar $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt{3}$ o professor deve sugerir que passem de raízes para potências.

- Caso os alunos tenham dificuldade em simplificar $(-3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}$ o professor deve questionar "uma vez que $(-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-3}$ será um número positivo ou negativo?". O objetivo é levar os alunos a perceber que podem pôr o sinal de – em evidência.

Questão 124.3

Resposta esperada:

- $y = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 = x + 2 \Leftrightarrow y^2 - 2 = x$; logo $f^{-1}(x) = x^2 - 2$ e $D_{f^{-1}} = D'_f = [0, +\infty[$

- $y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow y^3 = x$; logo $g^{-1}(x) = x^3$ e $D_{g^{-1}} = D'_g = \mathbb{R}$

Possíveis erros e dificuldades:

- Se os alunos não souberem como começar, o professor questiona "Como fazemos para encontrar a expressão da função inversa?". O objetivo é fazer os alunos pensar na correspondência inversa.

- Se os tiverem dificuldade em escrever a expressão da função inversa devido à troca das variáveis, o professor deve dar orientação, reforçando que é convenção escrever-se a função inversa em ordem à mesma variável da função original.

- É de esperar que alguns alunos escrevam o sinal de equivalência onde deveria estar o sinal de implicação, o professor deve sugerir "Na aula anterior vimos que nem sempre as expressões são equivalentes. Analisa os teus passos e verifica se todas essas expressões são equivalentes!".

- Caso os alunos encontrem a expressão da função inversa mas não indiquem o domínio, o professor deve perguntar "O que significa caracterizar uma função?".

- Caso os alunos tenham dificuldade em encontrar o domínio, o professor pergunta: "Que relação existe entre o domínio da função inversa e a função original?"

Discussão da Tarefa 124 da pág. 123 do manual (1*0 minutos*)

A discussão decorrerá da seguinte forma:

- Para cada alínea, pede-se a um aluno que tenha a resolução correta e que ainda não tenha ido ao quadro nessa aula para fazer a sua resolução no quadro pedindo a esse aluno ou a um colega que justifique cada passo da resolução.

- Depois do aluno registar no quadro a sua resposta, o professor pergunta a outro aluno (preferencialmente alguém que estivesse a tentar outra estratégia ou alguém que tenha cometido algum tipo de erro) ou à turma, se concorda ou não com a resposta dada e porquê.

- Pergunta-se aos alunos: "Então as inversas de funções com radicais são funções de que tipo? O que acontece ao domínio quando o expoente é par? E quando é ímpar?"

- Escreve-se com a ajuda dos alunos a seguinte síntese:

"As funções com radicais de índice n são funções inversas de funções polinomiais de grau n, sendo que, se n for par consideramos a função polinomial definida em $\mathbb{R}_0^+$ e se n for ímpar definida em $\mathbb{R}$."

Anexo B: Tarefas

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão

11ºANO – Matemática A – Turma B

Ficha de Trabalho

Nome: N.º:

Igualdade de Funções

Considera as funções:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

1. Calcula para cada uma das funções as imagens de: 3, 7 e 11. O que observas?
2. Determina, justificando, o domínio máximo de definição de cada uma das funções.
3. Calcula $f(-1)$.
4. As funções f e g são iguais? Justifica as tuas conclusões.
5. Desenha um esboço do gráfico de cada uma das funções.

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Operações com funções.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Criada por mim (apresentada numa ficha de trabalho). Esta é uma tarefa de investigação porque é aberta e tem um certo grau de desafio, uma vez que os alunos são levados a questionar "afinal o que é uma igualdade entre objetos matemáticos?" e a perceber que a definição não é sempre a mesma e depende da natureza dos objetos.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático (indutivo e/ou dedutivo);
Formulação de conjeturas;
Comunicação matemática;
Autonomia.

Objetivos específicos:

Recordar que uma função é caracterizada pela sua lei de formação e pelo seu domínio;
Recordar o conceito de domínio máximo de definição de uma função racional;
Compreender o conceito de igualdade de funções.

Tarefa 26 da pág. 98 do manual Novo Espaço da Porto Editora (Costa & Rodrigues, 2011)

Numa empresa têxtil, duas máquinas A e B funcionam de forma contínua durante 6 horas.

Decorridas x horas, após o início do funcionamento, a quantidade, em metros, de tecido produzido por cada uma das duas máquinas A e B é dada, respetivamente, pelas funções f e g definidas por:

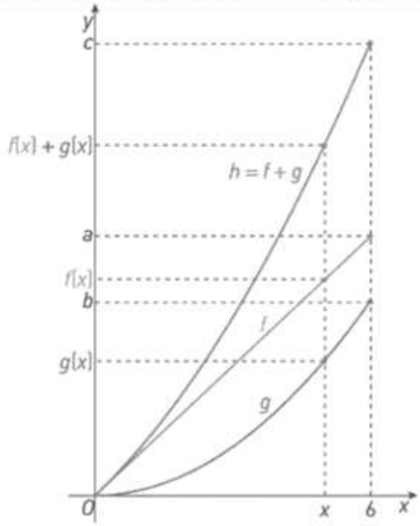
$$f(x) = 2x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2}{4}$$

1. Determina a quantidade de tecido, em metros, produzido por cada uma das máquinas durante as 6 horas de produção.

2. No contexto, qual é o significado da expressão $f(2) + g(2)$?

3. Escreve uma expressão que represente a quantidade de tecido, em metros, produzida pelas duas máquinas ao fim de x horas de funcionamento.

4. No contexto apresentado, indica o significado das letras a, b e c representadas no referencial da figura e indica uma relação entre os seus valores.



5. Determina ao fim de quanto tempo, após o início do funcionamento das duas máquinas, se tinham produzido no total 12 m de tecido.

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Operações com funções.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Manual adotado. Esta é uma tarefa de exploração porque é também aberta mas tem um menor nível de desafio, uma vez que somar expressões é um processo ao qual os alunos já estão habituados.Só o contexto em que o fazem é que é novo.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Resolução de problemas;
Interpretação de enunciados;
Comunicação matemática;
Autonomia.

Objetivos específicos:

Compreender o conceito de função soma.

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão
11ºANO – Matemática A – Turma B

Nome: N.º:

Ficha de Trabalho A

Estudar a Paridade

Sejam f e g duas funções reais de variável real.

1. Mostra que se f e g sãoímpares, então $f + g$ também é ímpar.
2. Supondo que f e g são pares, verifica a paridade de $f \times g$.
3. Investiga a paridade de $f - g$, tendo em conta a paridade de fe g.
4. Como será a paridade no caso de $\frac{f}{g}$? Justifica.

Ficha de Trabalho B

Sejam f e g duas funções reais de variável real.

1. Mostra que se f e g são ímpares, então $f - g$ também é ímpar.
2. Supondo que f e g são pares, verifica a paridade de $f + g$.
3. Investiga a paridade de $f \times g$, tendo em conta a paridade de f e g.
4. Como será a paridade no caso de $\frac{f}{g}$? Justifica.

Ficha de Trabalho C

Sejam f e g duas funções reais de variável real.

1. Mostra que se f e g são ímpares, então $f \times g$ é par.
2. Supondo que f e g são pares, verifica a paridade de $f - g$.
3. Investiga a paridade de $f + g$, tendo em conta a paridade de f e g.
4. Como será a paridade no caso de $\frac{f}{g}$? Justifica.

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Operações com funções.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Criada por mim (apresentada numa ficha de trabalho). Esta é uma tarefa de investigação, uma vez que tem um grau de desafio bastante elevado e é aberta, nomeadamente no que diz respeito às alíneas 3 e 4.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático (indutivo e/ou dedutivo);
Formulação de conjeturas;
Comunicação matemática;
Argumentação;
Autonomia.

Objetivos específicos:

Recordar que a definição de paridade de uma função;
Estudar a paridade das funções soma, diferença e produto;
Cimentar os conhecimentos sobre operações com funções.

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão

11ºANO – Matemática A – Turma B

Ficha de Trabalho

Nome: N.º:

Composição de Funções

1. Por cada concerto que dá, o Dj Guita recebe um *cachet* fixo de 2500€ e uma comissão de 30% sobre o lucro da venda dos bilhetes.
   a. A venda de bilhetes para o concerto de dia 8 de Agosto de 2013 rendeu 9000€ de lucro. Quanto recebeu o Dj Guita, nesse concerto?
   b. Escreve uma expressão que permita determinar quanto é que o Dj Guita recebe (D), quando dá um concerto, em função do lucro (l) obtido com a venda dos bilhetes.
   c. Como é uma pessoa famosa, o Dj Guita só aceita dar o concerto se o lucro com a venda dos bilhetes for pelo menos 8000€, caso contrário o concerto fica cancelado. Tendo em conta esta restrição, qual o domínio da função D?

2. O pavilhão Arina tem 2000 lugares e vende os bilhetes para concertos a 32,50€ cada. Os gastos com luz, som e segurança são fixos e o seu valor é sempre 650€. O lucro obtido com a venda dos bilhetes é calculado retirando estes custos ao valor de venda. Esse lucro será depois repartido entre o pavilhão, o artista e outros organizadores do evento.

2.1.Qual o lucro obtido no pavilhão Arina, num concerto em que se vendam 300 bilhetes?

2.2.Justifica que a função que determina o lucro (L) obtido neste pavilhão com a venda de n bilhetes é:

$$L(n) = 32{,}5n - 650, n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2000.$$

2.3.O pavilhão Arina quer organizar um concerto com o Dj Guita no dia 12 de Dezembro.

2.3.1.Qual o número mínimo de bilhetes que se devem vender para que o Dj aceite dar o concerto?

2.3.2.Quanto recebe o Dj Guita, relativamente a esse concerto, se forem vendidos 1500 bilhetes?

2.3.3.Escreve uma expressão que permita calcular a quantia de dinheiro (D) que o Dj Guita vai receber, em função do número de bilhetes (n) vendidos para este concerto.

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Operações com funções.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Criada por mim (apresentada numa ficha de trabalho). Esta tarefa é um problema porque tem um grau de desafio elevado e é fechada.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático (indutivo);
Formulação de conjeturas;
Comunicação matemática;
Interpretação de enunciados;
Autonomia.

Objetivos específicos:

Compreender a definição de função composta e o seu domínio máximo de definição.

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão

11ºANO – Matemática A – Turma B

Ficha de Trabalho

Nome: N.º:

Algumas propriedades da composição de funções

1. Sejam f e g duas funções reais de variável real monótonas.
   a. Investiga a monotonia de $f \circ g$ se f e g tiverem o mesmo sentido de variação (ambas crescentes ou ambas decrescentes).
   b. E se tiverem sentidos de variação diferentes?

Adaptado de: Matemática A 11, Porto Editora, 2011

2. Considera as funções f, g e h nos seus domínios máximos de definição e definidas pelas expressões:

$$f(x) = 2x + 1; \qquad g(x) = \frac{1}{x}; \qquad h(x) = x^3$$

   2.1. Caracteriza as funções: $h \circ f$, $f \circ h$, $g \circ h$ e $h \circ g$.

   2.2. A composição de funções é comutativa? Justifica.

Adaptado de: Novo Espaço 11, Porto Editora, 2011

Tópicos/Subtópicos:
Funções – Operações com funções.

Origem/ Tipo de Tarefa:
Questão 1 - Adaptado de: Matemática A 11, Porto Editora, 2011 (apresentada numa ficha de trabalho). Esta é uma tarefa de investigação porque é aberta e os alunos têm de estabelecer conjeturas e encontrar formas de as testar.

Questão 2 - Adaptado de: Novo Espaço 11, Porto Editora, 2011 (apresentada numa ficha de trabalho). Esta tarefa é um problema, uma vez que é relativamente fechada e tem um grau de desafio um pouco superior ao de um exercício porque os alunos têm de justificar uma propriedade.

Recursos:
Quadro branco e marcador;
Material de escrita.

Capacidades transversais:
Estabelecimento de conexões;
Raciocínio matemático (indutivo e/ou dedutivo);
Formulação de conjeturas;
Resolução de problemas;
Argumentação matemática.

Objetivos específicos:
Cimentar os conhecimentos sobre composição de funções;
Estudar a monotonia da função composta;
Compreender a definição de permutabilidade de funções.

Tarefa 102 da pág. 108 do manual Novo Espaço da Porto Editora (Costa & Rodrigues, 2011)

102. Considera que, num posto de abastecimento, o preço de um determinado combustível é de 1,40 € por litro.

102.1 Define o preço P a pagar em função do número de litros x de combustível abastecido.

102.2 Calcula a quantidade de combustível que o sr. Vasco pode abastecer se apenas dispõe de 35 €.

102.3 Define a quantidade x de combustível em função do dinheiro disponível para o abastecimento.

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Função Inversa.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Manual adotado. Esta tarefa é um exercício porque é fechado e de nível fácil. No entanto, a extensão proposta na discussão representa uma exploração matemática porque é aberta e os alunos são solicitados a fazer conjeturas e a confirmar ou refutar as mesmas.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Material de escrita.

Capacidades transversais (tarefa e extensão):

Comunicação matemática;
Estabelecimento de conexões;
Interpretação de enunciados;
Argumentação matemática.

Objetivos específicos da tarefa:

Encontrar a correspondência inversa de uma função.

Objetivos específicos da extensão da tarefa:

Cimentar a noção de função inversa;
Compreender a noção de função invertível;
Aprender a encontrar a função inversa de uma função.

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão

11ºANO – Matemática A – Turma B

Ficha de Trabalho

Nome: N.º:

Uma investigação sobre funções inversas

Seja f, a função de variável real, tal que $f\ (x)\ = \frac{x-2}{x+1}$.

1. Mostra que $f(x)\ =\ 1 - \frac{3}{x+1}$.

2. Indica, justificando:

   a) pontos de intersecção com os eixos coordenados;

   b) equações das assíntotas;

   c) contradomínio;

3. Justifica que existe função inversa de f e caracteriza-a.

4. Representa no mesmo referencial os gráficos de f e f^{-1}.

5. Compara os dois gráficos nos seguintes aspetos:

   a) pontos de intersecção com os eixos coordenados;

   b) equações das assimptotas;

   c) domínio e contradomínio.

6. Desenha, no mesmo referencial, a reta de equação $y\ =\ x$. Qual a relação entre os três gráficos?

7. Escolhe outra função invertível que conheças, determina a sua inversa e representa ambos os gráficos com o auxílio da calculadora gráfica. O que observas?

(Adaptado da Brochura: Funções, 11.º ano de escolaridade, 1998)

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Função inversa.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Adaptado da Brochura: Funções, 11.º ano de escolaridade, 1998 (apresentada numa ficha de trabalho). Esta é uma tarefa de investigação porque é aberta e os alunos têm de estabelecer conjeturas e encontrar formas de as testar. Além disso tem um grau de desafio apreciável, uma vez que mistura raciocínios algébricos com raciocínios gráficos.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Estabelecimento de conexões;
Raciocínio matemático (indutivo e/ou dedutivo);
Interpretação gráfica;
Formulação de conjeturas;
Argumentação matemática.

Objetivos específicos:

Consolidar os conhecimentos sobre funções inversas;
Compreender que os gráficos de duas funções inversas são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Tarefa 108 da pág. 113 do manual Novo Espaço da Porto Editora (Costa & Rodrigues, 2011)

> **108.** Mostra que a inversa de uma função afim injetiva é também uma função afim e que as retas representativas dos seus gráficos têm declives inversos.

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Função Inversa.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Manual adotado. Esta tarefa é um problema, uma vez que é relativamente fechada e tem um elevado grau de desafio, uma vez que os alunos têm de provar uma proposição.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático (dedutivo);
Comunicação matemática;
Resolução de problemas.

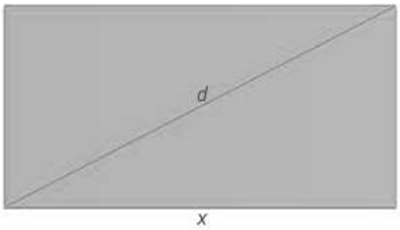
Objetivos específicos:

Consolidar os conhecimentos sobre função inversa;
Compreender a relação entre o declive de uma função afim injetiva e da sua inversa.

Tarefa 108 da pág. 113 do manual Novo Espaço da Porto Editora (Costa & Rodrigues, 2011)

Proposta 46

Considera todos os retângulos com 20 cm de perímetro.



Designa por x a medida de um dos lados.

1. Indica o conjunto de valores que x pode tomar.

2. Mostra que a medida da diagonal d do retângulo é dada, em função de x, pela expressão $d(x)=\sqrt{2x^2-20x+100}$.

3. Recorrendo à calculadora:

3.1 investiga entre que valores pode variar a medida da diagonal;

3.2 indica a área do retângulo que admite a menor das diagonais. O que podes concluir?

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Funções com radicais.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Manual adotado. Esta tarefa é um problema, uma vez que é relativamente fechada e tem um grau de dificuldade elevado, uma vez que os alunos nunca trabalharam com este tipo de funções.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Estabelecimento de conexões;
Resolução de problemas;
Comunicação matemática;
Interpretação gráfica.

Objetivos específicos:

Compreender a definição de função com radicais/irracional;
Estudar algumas características destas funções (com ênfase no domínio).

Tarefa 122 da pág. 121 do manual Novo Espaço da Porto Editora (Costa & Rodrigues, 2011)

122. Considera a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Mostra que:

122.1 $f\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = 2^{-\frac{1}{4}}$

122.2 $\dfrac{f(-1)}{f(\sqrt[3]{2})} = -2^{-\frac{1}{6}}$

122.3 $f(-27) \times f(27) = -3^{\frac{5}{2}}$

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Funções com radicais.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Manual adotado. Esta tarefa é um problema, uma vez que é relativamente fechada e não é imediato o caminho a seguir para chegar à resposta.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Resolução de problemas;
Estabelecimento de conexões.

Objetivos específicos:

Compreender a definição de potência de expoente fracionário.

Tarefa 132 da pág. 121 do manual Novo Espaço da Porto Editora (Costa & Rodrigues, 2011)

1. Considera dois números, representados por a e b.

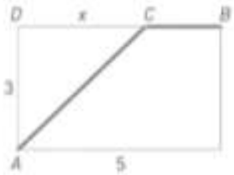
   1.1 Se $a = b$, podes concluir que $a^2 = b^2$?
   (Será que $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$?)

   1.2 Se $a^2 = b^2$, podes concluir que $a = b$?
   (Será que $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$?)
   Explica.

   1.3 Dá exemplo de dois números distintos cujos quadrados são iguais.

2. Numa instalação elétrica os pontos A e B de uma parede vão ser ligados por um fio.

   A seguir é apresentado um esquema da parede retangular e do traçado para a instalação do fio.



O ponto C é um ponto móvel que pertence a $[BD]$.

A ligação de A a B passa pelo ponto C.

2.1 Nas condições indicadas, qual deve ser a posição do ponto C de modo que o comprimento do fio seja mínimo? E de modo que o comprimento seja máximo?

2.2 Sendo $\overline{CD} = x$, $x \in [0, 5]$, designa por f a função que a cada valor de x faz corresponder o comprimento do fio.

2.2.1 Mostra que $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + 5 - x$.

2.2.2 Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina o valor de x para o qual o comprimento do fio é 7 m.

2.2.3 Calcula $f(1,6)$ e interpreta o resultado no contexto.

2.2.4 O João sabe que o fio tem 6 m de comprimento. Para determinar o valor de x apresentou a seguinte equação: $f(x) = 6$.

Completa a resolução da equação:

$$f(x) = 6 \Longleftrightarrow \cdots = 6 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = \cdots \Longrightarrow \left(\sqrt{x^2 + 9}\right)^2 = (\cdots)^2$$
$$\Longleftrightarrow x^2 + 9 = \cdots \Longleftrightarrow x = \cdots$$

Verifica se o valor encontrado é solução da equação dada (por substituição).

Nota: $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ lê-se "$a = b$ implica $a^2 = b^2$" ou "se $a = b$, então $a^2 = b^2$".

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Funções com radicais.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Manual adotado. Esta é uma tarefa de exploração, uma vez que tem um nível baixo de dificuldade mas é aberta.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Calculadora gráfica;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Estabelecimento de conexões;
Raciocínio matemático;
Argumentação matemática;
Comunicação matemática;
Interpretação gráfica.

Objetivos específicos:

Rever a diferença entre equivalência e implicação;
Resolver equações com radicais e confirmar as soluções por experimentação.

Tarefa 124 da pág. 123 do manual Novo Espaço da Porto Editora (Costa & Rodrigues, 2011)

124. Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

124.1 Indica o domínio de cada uma das funções.

124.2 Mostra que:

124.2.1 $(f \circ g)(-1) = (g \circ f)(-1)$

124.2.2 $g(-3) \times f(1) = -3^{\frac{5}{6}}$

124.3 Caracteriza a função inversa de cada uma das funções.

Tópicos/Subtópicos:

Funções – Funções com radicais.

Origem/ Tipo de Tarefa:

Manual adotado. Esta tarefa é um exercício pois é fechada e, apesar do grau de dificuldade ser elevado, os alunos conhecem o caminho a seguir para chegar a solução.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Material de escrita.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Estabelecimento de conexões.

Objetivos específicos:

Consolidar a noção de função com radicais;
Estudar as funções com radicais como inversas das funções potência.

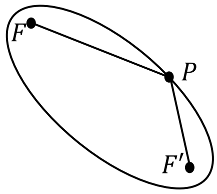
Anexo C: Relatório escrito individual

As Equações Irracionais e a Elipse

Relatório Escrito Individual

(Adaptado de: Matemática A 11, Porto Editora, 2011)

Definição: Dados dois pontos do plano F e F' (focos), uma **elipse** é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que a soma das distâncias de P a F e a F' ($\overline{FP} + \overline{F'P}$) é constante.



Teorema: Vamos considerar um referencial o.n. xOy e uma elipse centrada na origem do referencial cujos focos (F e F') pertencem ao eixo das abcissas.

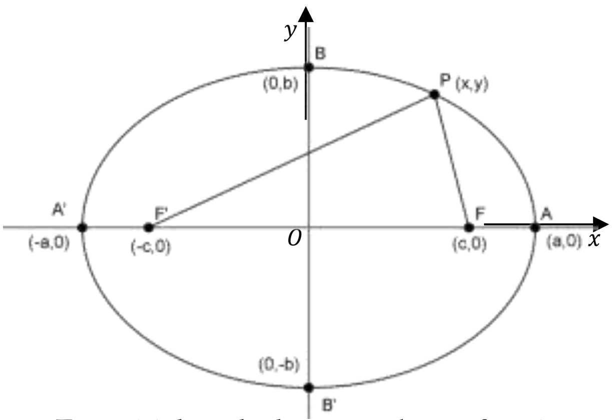


Figura 1 (adaptado de: www.roberprof.com)

Sejam A e A' os vértices da elipse que pertencem ao eixo Ox e B e B' os vértices da elipse que pertencem ao eixo Oy. Seja $\overline{FF'} = 2c$.

Se $\overline{AA'} = 2a$ e $\overline{BB'} = 2b$, então:

a **equação reduzida** desta elipse é $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

Demonstração:

(1) Podemos observar que $\overline{AF} + \overline{AF'} = 2a$.

Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse.

(2) Por definição de elipse, $\overline{FP} + \overline{PF'} = 2a$.

(3) Assim, $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow$

(4) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado,

(5) $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

(6) $\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Leftrightarrow$

(7) $\Leftrightarrow 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando novamente ambos os membros da equação ao quadrado,

(8) $a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \Leftrightarrow$

(9) $\Leftrightarrow a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow$

(10) $\Leftrightarrow a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow$

(11) $\Leftrightarrow a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$

(12) Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[OBF]$,

temos que $a^2 = b^2 + c^2$, logo $b^2 = a^2 - c^2$.

Substituindo na expressão (11), vem:

(13) $a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} \Leftrightarrow$

(14) $\Leftrightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ c.q.d.

Questões:

1. Justifica a afirmação (1) da demonstração apresentada.
2. Relaciona a afirmação (1) com a afirmação (2).
3. Escolhe **três** das afirmações numeradas entre (3) e (11) e justifica-as.
4. Analisa a afirmação (12). Mostra que os lados do triângulo $[OBF]$ medem a, b e c, justifica que o triângulo é retângulo e que a é a medida da hipotenusa.
5. Justifica o passo (13) da demonstração.
6. Demonstra o seguinte Teorema, no qual os focos da elipse se encontram no eixo das ordenadas:

   Teorema: Vamos considerar um referencial o.n. xOy e uma elipse centrada na origem do referencial cujos focos (F e F') pertencem ao eixo das ordenadas.

   Sejam A e A' os vértices da elipse que pertencem ao eixo Ox e B e B' os vértices da elipse que pertencem ao eixo Oy. Seja $\overline{FF'} = 2c$.
   Se $\overline{AA'} = 2a$ e $\overline{BB'} = 2b$, então:

   a **equação reduzida** desta elipse é $\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$.

   (Sugestão: começa por desenhar um esquema como o da Figura 1 para esta situação)

Guião de Relatório Escrito Individual

Na elaboração do teu relatório deves incluir a tua identificação e os seguintes aspetos:

* Título

* Apreciação inicial sobre a definição, teorema e demonstração apresentados, dando resposta a:
  - Percebi a definição de elipse? Consigo explicar o que é uma elipse por palavras minhas?
  - No enunciado do teorema, consigo identificar os dados, as hipóteses e o que se quer demonstrar?
  - Ao ler a demonstração pela primeira vez, percebi a maioria dos passos? Quais os que me pareceram à partida mais difíceis?

* Resposta às questões propostas

* Descrição do processo, das tentativas realizadas e das dificuldades (incluindo as questões não totalmente resolvidas)

* Apreciação sobre o trabalho realizado, dando resposta a:
  - Gostei de realizar esta tarefa? Porquê?
  - Aprendi algo durante a sua realização? O quê?
  - Ao responder às questões propostas, fiquei a perceber melhor a demonstração apresentada? Porquê?

* Bibliografia (caso tenha sido consultada)

<u>Aspetos que vão ser tidos em conta na avaliação do teu relatório:</u>

Componente do relatório	**Critérios**	**Cotação**	
Estrutura geral	- Apresentação - Organização e cumprimento dos pontos definidos no guião - Correção linguística, utilização correta de termos matemáticos, rigor na elaboração de gráficos e clareza de linguagem	2 valores	
Apreciação inicial e final	Capacidade de refletir sobre a própria compreensão, dificuldades e aprendizagens realizadas	Apreciação Inicial: 1 valor Apreciação Final: 3 valores	
Realização das questões propostas	- Rigor matemático - Justificações claras e fundamentadas	Questão 1: 1 Questão 2: 2 Questão 3: 2	Questão 4: 3 Questão 5: 1 Questão 6: 5

O prazo de entrega deste trabalho é **31 Março de 2014**.

Critérios de classificação do relatório escrito individual

<table>
<tr><th><u>Componente do relatório</u></th><th><u>Pontos a classificar</u></th><th><u>Critérios</u></th><th colspan="3"><u>Cotação máxima</u>
<u>(em valores)</u></th></tr>
<tr><td rowspan="3">Estrutura geral</td><td>- Apresentação</td><td>- Classificar como:
Mau – 0,1
Médio – 0,3
Bom – 0,5</td><td colspan="2">0,5</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>- Organização e cumprimento dos pontos definidos no guião</td><td>- Classificar como:
Mau – 0,1
Médio – 0,3
Bom – 0,5</td><td colspan="2">0,5</td></tr>
<tr><td>- Correção linguística, utilização correta de termos matemáticos, rigor na elaboração de gráficos e clareza de linguagem</td><td>- Atribuir ao esquema gráfico uma cotação de 0; 0,1; 0,2 ou 0,3 consoante o nível de rigor (pontos assinalados, eixos e origem assinalados, adequação ao enunciado do teorema)

Aos 0,7 valores restantes:

- Descontar 0,03 por cada erro linguístico geral

- Descontar 0,06 por cada erro de formalismo matemático (por exemplo utilizar uma designação errada ou trocar os símbolos $=$, $\Leftrightarrow$ e $\Rightarrow$)

- Descontar 0,09 por cada frase mal construída do ponto de vista lógico.

- Caso um mesmo erro apareça mais do que uma vez, só é descontado uma vez.</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Apreciação inicial e final</td><td rowspan="3">Apreciação Inicial (será avaliada a capacidade de refletir cobre a própria compreensão do enunciado)</td><td>Resposta à questão: - Percebi a definição de elipse? Consigo explicar o que é uma elipse por palavras minhas?</td><td>0,3</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="6">4</td></tr>
<tr><td>Resposta à questão: - No enunciado do teorema, consigo identificar os dados, as hipóteses e o que se quer demonstrar?</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>Resposta à questão: - Ao ler a demonstração pela primeira vez, percebi a maioria dos passos? Quais os que me pareceram à partida mais difíceis?</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Apreciação Final (será avaliada a capacidade de refletir sobre a própria compreensão, dificuldades e aprendizagens realizadas)</td><td>Resposta à questão: - Gostei de realizar esta tarefa? Porquê?</td><td>1</td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td>Resposta à questão: - Aprendi algo durante a sua realização? O quê?</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Resposta à questão: - Ao responder às questões propostas, fiquei a perceber melhor a demonstração apresentada? Porquê?</td><td>1</td></tr>
</table>

Componente do relatório	**Pontos a classificar**		**Critérios**	**Cotação máxima** (em valores)		
Realização das questões propostas	A Avaliar: - Rigor matemático - Justificações claras e fundamentadas	1	- Justificar que $\overline{AF} = \overline{A'F'}$	0,4	1	14
			- Justificar que $\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{AA}$	0,3		
			- Concluir que $\overline{AF} + \overline{AF'} = 2a$	0,3		
		2	- Referir que $\overline{FP} = \overline{PF}$	0,1	2	
			- Referir que a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos é constante	1		
			- Referir que A e P pertencem ambos à elipse	0,4		
			- Concluir que $\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$	0,5		
		3	- Justificar corretamente uma afirmação	0,6	2	
			- Justificar corretamente duas afirmações	1,3		
			- Justificar corretamente três afirmações	2		
		4	- Justificar que $\overline{OB} = b$	0,5	3	
			- Justificar que $\overline{OF} = c$	0,5		
			- Justificar que $\overline{FB} = a$	1		
			- Justificar que $[OBF]$ é retângulo	0,5		
			- Justificar que a é a medida da hipotenusa	0,5		
		5	- Referir que o passo (12) foi usado substituindo-se a^2-c^2 por b^2	0,4	1	
			- Justificar que $a^2b^2 \neq 0$	0,2		
			- Referir que ao dividirmos ambos os membros de uma equação por um valor não nulo obtemos uma equação equivalente	0,4		
		6	- Progresso equivalente aos passos (1) e (2)	0,8	5	
			- Progresso equivalente aos passos (3) e (4)	0,5		
			- Progresso equivalente aos passos (5), (6) e (7)	1		
			- Progresso equivalente aos passos (8) e (9)	0,5		
			- Progresso equivalente aos passos (10) e (11)	0,6		
			- Progresso equivalente ao passo (12)	0,8		
			- Progresso equivalente aos passos (13) e (14)	0,8		

Na componente referente à realização das questões propostas, em cada questão:

- caso o aluno não apresente resolução, mas descreva as tentativas efetuadas e porque as descartou, será atribuída uma cotação de **0,2 valores**;

- caso o aluno apresente mais de uma tentativa de resolução, sem indicar qual delas considera ser a resposta correta à questão proposta, será atribuída uma cotação de **0 valores**;

Caso algum aluno não entregue o relatório na data prevista (salvo situações justificadas), será aceite a entrega no dia seguinte com desvalorização de **1 valor** na classificação final do relatório.

11.º

Relatório Escrito Individual - Classificações

	Estrutura geral				Apreciação Inicial e Final			Questões							Classificação Final
	Apresentação Geral	Organização Pontos	Correção Rigor	Subtotal	Inicial	Final	Subtotal	1	2	3	4	5	6	Subtotal	
N.	**0,5**	**0,5**	**1**	**2**	**1**	**3**	**4**	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**5**	**14**	**20**
1	0,5	0,3	0,56	1,36	0,7	2	2,7	1	1,4	2	0,5	0	2,1	7	10,1
2	0,5	0,5	0,78	1,78	0,7	3	3,7	1	1,6	2	1,5	0,4	3,4	9,9	15,4
4	0,3	0,5	0,84	1,64	0,9	3	3,9	1	2	2	0,9	0,4	3,8	10,1	15,6
6	0,5	0,5	0,42	1,42	0,7	2,25	2,95	0,3	0,6	0,3	0,2	0,2	0,2	1,8	5,2
7	0,3	0,5	0,79	1,59	0,6	2,5	3,1	0	0	1,6	1,5	0,4	3,2	6,7	10,4
8	0,3	0,5	0,88	1,68	1	3	4	0,4	0,5	1,3	1,5	0,8	4,3	8,8	14,5
9	0,5	0,5	0,6	1,6	0,6	2,25	2,85	0,6	1,5	1,9	1,5	0,4	1,6	7,5	12,0
10	0,5	0,5	0,38	1,38	1	2	3	0,7	0,5	1,6	0,5	0	2	5,3	9,7
13	0,5	0,5	0,68	1,68	0,8	2,75	3,55	1	1,6	2	0,6	0	3,8	9	14,2
14	0,3	0,5	0,81	1,61	1	2,75	3,75	1	0,3	1	1,5	0,5	4,8	9,1	14,5
17	0,3	0,5	1	1,8	0,9	3	3,9	1	1,5	1,8	3	0,8	0	8,1	13,8
18	0,5	0,5	0,69	1,69	1	2,5	3,5	0,8	2	2	2	0,8	5	12,6	17,8
20	0,3	0,5	0,34	1,14	0,7	2,25	2,95	0,7	1	0	1,4	0,8	3,5	7,4	11,5
21	0,5	0,5	0,69	1,69	0,9	3	3,9	1	1	1,3	1,5	0,3	4,8	9,9	15,5
23	0,5	0,5	0,73	1,73	1	2,5	3,5	1	2	1,8	1,4	0,8	2	9	14,2
Média		0,49	0,68	1,59	0,83	2,58	3,42	0,77	1,17	1,51	1,3	0,44	2,97	8,15	13,2

Anexo D: Guião de Entrevista

Como sabes, o meu nome é Cláudia Simãozinho e estou neste momento a terminar o Mestrado em Ensino de Matemática. Associado ao mesmo, estou a fazer um estudo cujo objetivo é compreender a forma como os alunos argumentam matematicamente e para isso vou colocar-te algumas perguntas. Esta entrevista não será usada para te avaliar de nenhuma forma e, no meu trabalho, nunca será referido o nome do entrevistado.

1 – Como descreves a tua relação com a Matemática ao longo da tua escolaridade? Porque tens essa relação?

2 – Para ti, qual a principal diferença entre a Matemática e as outras disciplinas do teu currículo escolar?

3 – Refere algumas aprendizagens sobre funções que tenhas realizado durante as aulas lecionadas por mim.

4 – Consideras importante justificar os teus raciocínios? Que estratégias usas para justificar matematicamente?

5 – O que é, para ti, uma demonstração matemática?

6 – Refere algumas aprendizagens que tenhas realizado, ao longo deste ano letivo, relacionadas com justificações e demonstrações.

7 – Acerca do relatório. Qual foi a tua primeira reação em relação à tarefa apresentada? Porquê?

8 – Descreve como procedeste para elaborar o relatório (quando começaste, quanto tempo demoraste, que dúvidas tiveste, que estratégias experimentaste, se tiveste ajuda …).

9 – Que dificuldades sentiste ao elaborar a apreciação inicial e final do relatório?

10 – Finalmente, o que aprendeste com a elaboração do relatório? Como é que o relatório contribuiu para essas aprendizagens?

Anexo E: Outros materiais

Carta de Autorização do Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Ex.ª Sra. Professora Laurinda Pereira,
Diretora do Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Eu, Cláudia Patrícia Neves Henriques Simãozinho, aluna do Mestrado em Ensino da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, estando a realizar a minha intervenção de prática letiva supervisionada na turma B do 11.º ano de escolaridade, no ano letivo 2013/2014, sob a orientação da professora Helena Fonseca, venho, por este meio, solicitar autorização para desenvolver, neste âmbito, um trabalho de investigação que integrará o meu relatório final.

O principal objetivo deste trabalho é perceber a importância das demonstrações na compreensão dos conceitos matemáticos. Para a sua realização, necessito recolher dados através da gravação áudio de aulas onde se discutam demonstrações matemáticas e da realização de entrevistas a alunos.

O desenvolvimento desta investigação não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os participantes, estando garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato dos alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do Mestrado.

Irei, ainda, proceder ao pedido de autorização dos Encarregados de Educação dos alunos para a referida recolha de dados.

Agradeço, desde já, a colaboração,

Lisboa, 1 de Outubro de 2013

____

Carta de Autorização dos Encarregados de Educação

Exmo. Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Cláudia Patrícia Neves Henriques Simãozinho, pretendo desenvolver um trabalho de investigação, no ano letivo 2013/2014, no âmbito do relatório da prática supervisionada para obtenção do Mestrado em Ensino da Matemática que me encontro a concluir no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. O principal objetivo deste trabalho é perceber a importância das demonstrações na compreensão dos conceitos matemáticos e, para sua realização, necessito recolher dados através da gravação áudio de aulas onde se discutam demonstrações matemáticas e da realização de entrevistas a alunos. O desenvolvimento do trabalho não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os alunos. Ao abrigo da Lei 67/98 de 26 de Outubro, será garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato de todos os alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do Mestrado.

Solicito, assim, autorização para implementar o trabalho de investigação anteriormente descrito através do preenchimento da declaração em anexo.

Agradeço, desde já, a sua colaboração,

Lisboa, 1 de Outubro de 2013

A Professora

____

AUTORIZAÇÃO

Eu,____, encarregado de educação do(a) aluno(a) _______________________________________, n.º ____, da turma B do 11.º ano, declaro que tomei conhecimento dos objetivos do trabalho de investigação desenvolvido pela Cláudia Simãozinho no âmbito do seu trabalho de Mestrado e da necessidade da respetiva recolha de dados. Autorizo a participação do meu educando com a garantia do respetivo anonimato.

__________________, ____/10/2013

O(a) Encarregado(a) de Educação

____

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Escola Secundária de Dona Luísa de Gusmão

11ºANO - Matemática A - Turma B

Síntese de Ideias da Ficha de Trabalho

Estudar a Paridade

Questão 1

A reter:	Exemplo:
Mostra que se …, então …	Mostra que se f e g são ímpares, então $f - g$ é ímpar.
Hipóteses/Condições iniciais	f e g são ímpares, logo $\begin{cases} f(-x) = -f(x) \ \ (1) \\ g(-x) = -g(x) \ \ (2) \end{cases}$
O que queremos mostrar	Queremos mostrar que $f - g$ é ímpar, ou seja, $(f-g)(-x) = -(f-g)(x)$.
Para mostrar uma igualdade: - Pegamos na igualdade e trabalhamos até obter uma proposição verdadeira	$(f-g)(-x) = -(f-g)(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(-x) - g(-x) = -(f(x) - g(x)) \Leftrightarrow$ (por definição de função diferença) $\Leftrightarrow -f(x) - (-g(x)) = -(f(x) - g(x)) \Leftrightarrow$ (por (1) e (2)) $\Leftrightarrow -f(x) + g(x) = -f(x) + g(x)$ (desembaraçando de parêntesis) Obtivemos uma proposição verdadeira logo $f - g$ é ímpar c.q.d.
ou	**ou**
- Pegamos num dos membros da igualdade e tentamos trabalhá-lo até chegar ao que está no outro membro.	$(f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) =$ (por definição de função diferença) $= -f(x) - (-g(x)) =$ (por (1) e (2)) $= -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) =$ (pondo o sinal de – em evidência) $= -(f-g)(x)$ c.q.d.

Questão 2

A reter:	Exemplo:
Supondo que …, verifica a paridade	Supondo que f e g são pares, verifica a paridade de $f \times g$.
Hipóteses/Condições iniciais	f e g são pares, logo $\begin{cases} f(-x) = f(x) \ \ (1) \\ g(-x) = g(x) \ \ (2) \end{cases}$
Não sabemos o que vamos obter.	Queremos ver se $f \times g$ é par ou ímpar.
Tentamos calcular a imagem de $-x$ e verificamos se é igual à imagem de x ou o seu simétrico.	$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) =$ (por definição de função produto) $= f(x) \times g(x) =$ (por (1) e (2)) $= (f \times g)(x)$ logo $f \times g$ é <u>par</u>.

Questão 3

A reter:	**Exemplo:**
Investiga a paridade de…	Investiga a paridade de $f + g$.
Não temos hipóteses e, por isso, temos de ser nós a separar em casos.	3 situações distintas $\begin{cases} f \text{ e } g \text{ são pares} & (1) \\ f \text{ e } g \text{ são ímpares} & (2) \\ f \text{ é par e } g \text{ é ímpar} & (3) \end{cases}$
Não sabemos o que vamos obter.	Queremos ver se $f + g$ é par ou ímpar.
Tentamos calcular a imagem de $-x$ e verificamos se é igual à imagem de x ou o seu simétrico.	Hipótese 3 $\begin{cases} f(-x) = f(x) & (1) \\ g(-x) = -g(x) & (2) \end{cases}$ $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) =$ (por definição de função soma) $= f(x) + \left(-g(x)\right) =$ (por (1) e (2)) $= f(x) - g(x)$ que é diferente de $(f + g)(x)$, logo a função não é par, e também é diferente de $-(f + g)(x)$, logo a função também não é ímpar.

Conclusões tiradas:

- Se f e g são funções pares, então $f + g, f - g, f \times g$ e $\frac{f}{g}$ são pares.

- Se f e g são funções ímpares, então $f + g$ e $f - g$ são ímpares, e $f \times g$ e $\frac{f}{g}$ são pares.

- Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então $f + g$ e $f - g$ não são pares nem ímpares, e $f \times g$ e $\frac{f}{g}$ são ímpares.